

ANÁLISIS DE TRIÁNGULOS

INTRODUCCIÓN

La **trigonometría** plana estudia las relaciones métricas existentes entre los elementos de las figuras trazadas en un plano y limitadas por segmentos de rectas; como dichas figuras puede descomponerse siempre en triángulos, reviste especial importancia la resolución de los mismos.

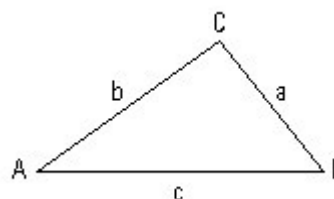


Resolver un triángulo es obtener a partir de algunos de sus elementos (ángulos y lados) los restantes ángulos y lados así como su perímetro y su área. Los ángulos se denotan con mayúsculas y los lados con minúsculas.

La relación matemática más famosa, es el llamado teorema de Pitágoras que relaciona los lados de un triángulo rectángulo: El cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos.

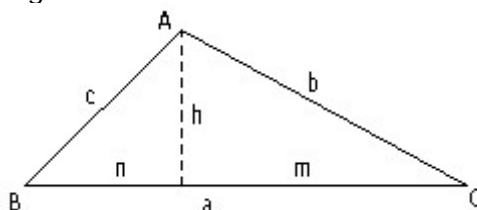
En unas tablillas babilónicas que se conservan en Nueva York, y que son 2.500 años más antiguas que Pitágoras aparecen inscripciones que permiten suponer que los sabios de aquella época conocían la relación entre los lados de algunos triángulos rectángulos.

Los agrimensores y los topógrafos se valen de la trigonometría plana para sus mediciones. Para la medida de ángulos sobre el terreno utilizan un instrumento llamado teodolito.



TEOREMAS CLÁSICOS

Mediante los siguientes teoremas y fórmulas se pueden resolver los cuatro casos a los que se reduce un triángulo:



Caso	Datos	Descripción
Primero	A, b y c	Dos de lados y el ángulo comprendido entre ellos
Segundo	a, b y c	Los tres lados
Tercero	A, B y c	Uno de los lados y dos de los ángulos
Cuarto	a, b y A	Dos de los lados y el ángulo opuesto a uno de ellos

- **Teorema de Pitágoras:** En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa a es igual a la suma de los cuadrados de los catetos b y c .

$$a^2 = b^2 + c^2$$

- **Teorema de la altura:** En un triángulo rectángulo, la altura es media proporcional entre las proyecciones m y n de los catetos sobre la hipotenusa.

$$\frac{h}{m} = \frac{n}{h}$$

- **Teorema del cateto:** En un triángulo rectángulo, cualquier cateto es media proporcional entre la hipotenusa y la proyección de ese cateto sobre ella.

$$\frac{b}{a} = \frac{m}{b} \quad y \quad \frac{c}{a} = \frac{n}{c}$$

- **Teorema del seno:** En un triángulo cualquiera se comprueba la siguiente relación, siendo R el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A} = \frac{b}{\operatorname{sen}B} = \frac{c}{\operatorname{sen}C} = 2R$$

- **Teorema del coseno:** En un triángulo cualquiera se comprueba la siguiente relación, y sus fórmulas homólogas en función de los ángulos B y C . También se le conoce como el teorema de Carnot. Se observa que si el triángulo es rectángulo en A , se obtiene el teorema de Pitágoras.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

- **Fórmula de Herón:** La siguiente expresión permite obtener el área del triángulo si se conoce el semiperímetro p .

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Aunque también se puede obtener mediante la siguiente fórmula:

$$S = \frac{bc \operatorname{sen}A}{2}$$

EJERCICIOS

Se presentan una serie de problemas que se pueden realizar, en su mayoría, con el modelo de Excel correspondiente a este apartado. Resolver un triángulo supone determinar los lados y ángulos restantes, el perímetro y el área del mismo.

1. Resolver el triángulo cuya hipotenusa mide 27 cm y uno de sus ángulos es de 30° .

2. Resolver el triángulo que tiene un cateto de 8 cm y cuya hipotenusa mide 12 cm.

3. Resolver el triángulo ABC del que se conocen los lados $a = 40$ m y $b = 32$ m y el ángulo $B = 123^\circ$.

4. Resolver el triángulo ABC del que se conocen sus tres lados: $a = 20$ m, $b = 15$ m y $c = 26$ m.
5. Resolver el triángulo ABC del que se conocen los lados $a = 9$ m y $b = 17$ m y el ángulo $C = 50^\circ$.
6. Resolver el triángulo ABC del que se conocen los ángulos $A = 40^\circ$ y $B = 55^\circ$ y el lado $c = 50$ m.
7. Resolver el triángulo ABC del que se conocen los lados $a = 20$ m y $b = 15$ m y el ángulo $A = 50^\circ$.
8. Los lados de un triángulo son proporcionales a 2, 3 y 4 respectivamente. Determinar su área si su perímetro es 81 m.