

# TEORÍA DE JUEGOS: ÍNDICES DE PODER

## Teoría

Este trabajo, relacionado con la Teoría de Juegos, ha sido propuesto como actividad complementaria a los alumnos y alumnas del Bachillerato de Ciencias Sociales.

La *Teoría de Juegos* creada en 1944 por el matemático *John Von Newmann* y el economista *Oscar Morgenstern* ha tenido una gran importancia en las Ciencias Sociales cuantitativas.

El valor principal de la teoría de juegos es que analiza y cuantifica conceptos como la cooperación, la competición, y los conflictos interpersonales.

Los juegos se clasifican en bipersonales o n-personales, con pagos de suma cero (lo que ganan unos lo pierden los otros) o de suma no nula (podrían ganar o perder todos). En este caso, no sólo conviene competir, sino que a veces, es mejor colaborar.

Sea  $N$  el conjunto de un "cuerpo electoral" y  $W$  el conjunto de todas las coaliciones ganadoras sujeto a las siguientes restricciones:

1.  $\emptyset \notin W$ , el conjunto vacío no se considera una coalición
2.  $N \in W$ , el conjunto completo si es una coalición
3. Si  $S \in N$  y  $T \in N$  con  $S \in W$  y  $S \subset T$  entonces  $T \in W$

Un juego simple se define como un par  $(N, W)$  que satisface las condiciones (1) y (3).

Una coalición  $S$  toma el valor 1 si es ganadora  $v(S) = 1$  y el valor 0 si es perdedora  $v(S) = 0$ .

$[q; w_1, w_2, \dots, w_n]$  indica que se necesita una cantidad  $q$  de votos para ganar una votación y que  $w_1, w_2, \dots, w_n$  son los votos de que dispone cada partido o grupo de poder.

$$\text{Por tanto } v(S) = 1 \Leftrightarrow S \in W \Leftrightarrow \sum_{i \in S} w_i \geq q.$$

Veamos un ejemplo histórico sobre el poder de los votos:

El Mercado Común, embrión de la actual Unión Europea, estaba formado por seis miembros: Alemania, Francia, Italia, Bélgica, Holanda y Luxemburgo.

Muchas decisiones eran tomadas por una mayoría cualificada y cada país tenía asignado un número de votos de acuerdo con la fórmula  $[12; 4, 4, 4, 2, 2, 1]$

Si se observa las decisiones podían ser tomadas por los tres grandes países, o por dos grandes con dos pequeños. En todos los casos Luxemburgo, con 1 voto, no tenía ningún poder y el poder de los países medianos no estaba en la relación 1:2 que indicaba el número de votos.

!!!porcentaje de votos  $\equiv$  porcentaje de poder!!!

La lucha entre partidos políticos es un auténtico juego  $n$ -personal, donde las coaliciones están a la orden del día. Vamos a considerar *juegos simples*: los partidos se alían para ganar una votación concreta por mayoría y no es posible la abstención.

Se dice que el grupo de poder (partido político)  $i$  puede hacer un “movimiento negativo” cuando al abandonar una coalición esta deja de ser ganadora y un “movimiento positivo” cuando al incorporarse a una coalición perdedora, la hace ganadora.

Un grupo de poder se dice “dictatorial” cuando no necesita de los votos de nadie (mayoría absoluta) o es imprescindible para la formación de cualquier mayoría. En el extremo opuesto está el grupo sin poder alguno que es aquel que no puede hacer ni movimientos positivos ni negativos.

Después de esta breve introducción teórica, analizaremos mediante un ejemplo concreto, el poder de cada partido (y de sus representantes) teniendo en cuenta además del número de escaños, las posibles coaliciones en las que puede participar.

En unas elecciones se ha obtenido la siguiente distribución de escaños:

partido	A	B	C	D
escaños	15	13	3	1

Si las votaciones son por mayoría simple se indicaría: [17; 5, 13, 3, 1]

1. ¿Qué porcentaje de “poder” tiene cada partido? ¿Y cada diputado?
2. Escribir todas las coaliciones posibles e indicar las que son ganadoras.

Al valorar el poder de los partidos se debe tener en cuenta su posible participación en coaliciones ganadoras. Existen tres índices distintos para obtener la medida del poder de los partidos.

#### Índice de DEEGAN-PACKEL

3. Buscar las coaliciones ganadoras *minimales* (las que no contienen una coalición ganadora menor).
4. Calcular el número de coaliciones ganadoras minimales (CGM):  $g$ .
5. Obtener el inverso del número de partidos que forman cada CGM que contenga al partido  $i$ .

El poder del partido  $i$  se obtiene dividiendo la suma de los inversos obtenidos entre  $g$ .

6. Obtener el poder de cada partido. ¿Qué poder tiene cada diputado, según el partido al que pertenezca?
7. Justificar los diferentes resultados obtenidos en 1 y en 6.

Índice de SHAPLEY-SHUBIK

8. Escribir todas las permutaciones posibles que se pueden formar tomando los cuatro partidos.

9. Una ordenación es un *pivote* para el partido  $i$ , si la coalición, formada por los partidos que preceden a  $i$  en esa ordenación, no es ganadora; sin embargo es ganadora cuando se incorpora el partido  $i$ .

El poder del partido  $i$  se obtiene dividiendo el número de pivotes de  $i$  entre el total de permutaciones.

10. Obtener el poder de cada partido y "repartirlo" después entre sus diputados. Comentar los resultados.

Índice de BANZHAF

11. Escribir todas las coaliciones posibles (un partido sólo también se considera coalición).

Una coalición a la que pertenece el partido  $i$  es un *movimiento* del partido  $i$ , si la coalición es ganadora y deja de serlo al abandonarla el partido  $i$ .

El poder del partido  $i$  se obtiene dividiendo el número de movimientos del partido  $i$  entre el número total de movimientos.

12. Obtener el poder de cada partido. Comentar los resultados.

13. Comprobar, considerando al menos tres partidos, que si todos tienen el mismo número de diputados los tres índices coinciden.

- Una vez conocida la forma de determinar estos tres índices, vamos a aplicarlos a las instituciones que en mayor o menor medida nos afectan: El Consejo Escolar del Centro, El Ayuntamiento, El Parlament Valencià, Las Cortes Generales y El Parlamento Europeo.

14. Obtener el reparto actual de escaños en el Parlament Valencià y hacer el análisis de poder correspondiente utilizando el índice de *BANZHAF*.

15. Obtener el resultado de las últimas elecciones municipales a Elx y hacer el mismo análisis usando el índice de *SHAPLEY-SHUBIK*.

16. Si un concejal se pasara al grupo mixto, determinar las nuevas relaciones de poder derivadas del *transfuguismo* político.

17. Averiguar el número de representantes de cada estamento en el Consejo Escolar y utilizar el índice *DEEGAN-PACKEL* para estudiar las relaciones de poder en el Centro. Se considera que cada grupo (profesores, padres etc.) votan en bloque.

18. Obtener el índice de *BANZHAF* para cada uno de los partidos representados en las Cortes Generales. ¿Cómo quedarían modificados para votaciones en las que se requiera una mayoría cualificada de dos tercios?

19. Determinar el índice de poder de DEEGAN-PACKEL para España y compararlo con el de Francia en la Unión Europea teniendo en cuenta el número de escaños de cada país. ¿Tiene el poder que le corresponde por población?.

País	Escaños	Población
Alemania	99	81,947,100
Reino Unido	87	59,751,900
Francia	87	59,107,500
Italia	87	58,082,500
España	64	41,153,400
Holanda	31	16,179,500
Grecia	25	11,020,700
Bélgica	25	10,274,700
Portugal	25	10,343,000
Suecia	22	8,870,100
Austria	21	8,051,700
Dinamarca	16	5,421,200
Finlandia	16	5,204,900
Irlanda	15	3,780,600
Luxemburgo	6	446,000

20. Buscar información sobre la ampliación de la Unión Europea y analizar el nuevo reparto de poder.



Von Neumann



Morgenstern



Shapley



Shubik



Banzhaf

## TEORÍA DE JUEGOS: ÍNDICES DE PODER

### Soluciones

1.  $A \rightarrow 46,9\%$  ;  $B \rightarrow 40,6\%$  ;  $C \rightarrow 9,4\%$  ;  $D \rightarrow 3,1\%$
2. La mayoría absoluta está en 17 escaños:  
AB (28); AC (18); ABC (31); ABD (29); ADC (19); BCD (17); ABCD (32)
3. AB; AC; BCD
4. 3
5.  $A \rightarrow \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$  ;  $B \rightarrow \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$  ;  $C \rightarrow \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$  ;  $D \rightarrow \frac{1}{3}$
6.  $I_A \rightarrow \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{3} = 33,3\%$  ;  $I_B = I_C \rightarrow \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{3} = \frac{5}{18} = 27,8\%$  ;  
 $I_D \rightarrow \frac{\frac{1}{3}}{3} = \frac{1}{9} = 11,1\%$
7. A y B pierden poder y en cambio C y D lo ganan. El más favorecido es C a pesar de tener muy pocos escaños pues es determinante para la formación de dos coaliciones.
8. Son  $P_4 = 4! = 24$  las permutaciones posibles con cuatro partidos.  
pivotes de A: BACD, BADC, BCAD, BDAC, CBAD, DABC, DBAC, DCAB, DCBA  
pivotes de B: ABCD, ABDC, ADBC, CABD, CADB, CDAB, CDBA  
pivotes de C: ACBD, ACDB, ADCB, BDCA, DACB, DBCA  
pivotes de D: BCDA, EBDA
9. A (9); B (7); C (6); D (2)
10.  $I_A = \frac{9}{24} = 37,5\%$  ;  $I_B = \frac{7}{24} = 29,2\%$  ;  $I_C = \frac{6}{24} = 25\%$  ;  
 $I_D = \frac{2}{24} = 8,3\%$   
El poder de cada partido se aproxima más a un reparto proporcional al número de escaños obtenido.  
  
Para los diputados, dependiendo del partido al que pertenezcan les corresponde el siguiente "poder":  
 $D_A = 2,5\%$  ;  $D_B = 2,25\%$  ;  $D_C = 8,3\%$  ;  $D_D = 8,3\%$   
Es evidente que ser un diputado de un grupo minoritario otorga más poder, de ahí la "tentación del tráfuga" deseoso de constituir su propio grupo.
11. En total  $15 = 2^{4-1}$ : A, B, C, D, AB, AC, AD, BC, BD, CD, ABC, ABD, BCD, ACD, ABCD

12.  $A \rightarrow AB, AC, ABC, ABD$ ;  $B \rightarrow AB, ABC, ABD, BCD$ ;  
 $C \rightarrow BCD, ACD$ ;  $D \rightarrow BCD$

$$I_A = I_B = \frac{4}{11} = 36,4\% ; I_C = \frac{2}{11} = 18,2\% ; I_D = \frac{1}{11} = 9,1\%$$

En este caso se igualan los índices de A y B y disminuye bastante el de C. Parece que una pequeña diferencia de escaños no es significativa.

13. Sea  $[2e; e; e; e]$  es el caso con tres partidos con el mismo número de escaños.

Índice de DEEGAN-PACKEL: AB, AC, BC son las CGM.

$$I_A = I_b = I_C = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{3}$$

Índice de SHAPLEY-SHUBIK: pivotes de A (BCA, CBA), pivotes de B (ACB, CAB), pivotes de C (ABC, BAC).  $I_A = I_b = I_C = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Índice de BANZHAF: movimientos de A (AB, AC), movimientos de B (AB, BC), movimientos de C (AC, BC).  $I_A = I_b = I_C = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$