

EL NÚMERO [PI]

1. INTRODUCCIÓN

Los geómetras habían constatado, desde muy antiguo, que la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro se mantenía constante, independientemente del tamaño de la misma. A ese número, que muchos siglos más tarde se demostró era irracional, le llamaron pi (p).

Una primera referencia de su valor viene dada por la siguiente cita bíblica: "Hizo el Mar de metal fundido que tenía diez codos de borde a borde; era enteramente redondo y de cinco codos de altura; y ceñido todo alrededor de un cordón de treinta codos" (I Reyes 7,23).

Traducido al lenguaje algebraico $p = \frac{C}{D} = \frac{30}{10} = 3$ En el papiro de Rhind, los egipcios dieron

como valor del número $p = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{256}{81} = 3,1604938$

Fue Arquímedes el primero que científicamente calculó el número π por aproximaciones sucesivas utilizando un método geométrico, dando como valor:

$$\frac{223}{71} < p < \frac{220}{70} \text{ es decir } 3,140845 < p < 3,142857$$

Este método arquimediano fue utilizado con variantes durante muchos siglos mejorando sucesivamente las cifras de p, hasta llegar a François Viète (1540-1603) que llegó a darlo con 35 decimales.

Tuvo que llegar Newton, creador del Análisis junto con Leibniz, para obtener p de una manera diferente. A partir de ese momento es el Análisis la herramienta para el cálculo de p.

William Shanks en 1873 da p con 707 cifras y su compatriota D. F. Ferguson tiene la moral de comprobar que está equivocado a partir de la cifra 527, y da el resultado correcto con 710 cifras.

En 1947 J. W. Wrench obtiene 808, y nuevamente Shanks encuentra un error en la cifra 723 y da las 808 correctas.

Si Arquímedes pasa del método del cuento de la vieja al científico y Newton da un cambio cualitativo utilizando el Análisis, es la aparición de las computadoras lo que revoluciona el cálculo de p.

En 1949 el ENIAC, ordenador que haría sonreír a los niños de nuestros días, da p con 2037 cifras. Sucesivamente se obtienen 16000 en 1959, un cuarto de millón en 1966, 500 millones más o menos en 1980.

Y la historia continúa...

2. MÉTODO DE ARQUÍMEDES

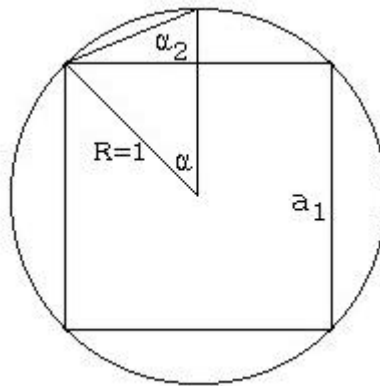
Los geómetras habían constatado, desde muy antiguo, que la relación entre la longitud de la

Como hemos visto Arquímedes dio unas aproximaciones de π , tanto por exceso como por defecto. Para ello uso un método de calcular perímetros de polígonos inscritos y circunscritos a una circunferencia, y al dividirlos por el diámetro obtenía aproximaciones sucesivas de $\pi_n = P_n / D$

Utilizó polígonos de 6, 12, 24, 48 y 96 lados. Nosotros vamos a seguir un método muy parecido utilizando sólo los polígonos inscritos (aproximaciones por defecto), pero partiendo del cuadrado y duplicando también los lados de los polígonos inscritos.

Arquímedes no tenía ordenador como nosotros, que nos permite hacer cálculos con mucha facilidad pudiendo llegar a polígonos de muchos más lados y dar una aproximación mejor

Para facilitar los cálculos vamos a tomar una circunferencia de radio unidad.



Observa en la figura, que hemos llamado a_1 al lado del cuadrado inscrito y a_2 al del octógono regular

a) ¿Cuanto vale a ? Utiliza la trigonometría y completa la tabla:

$a_1 =$	$p_1 = 4 a_1 = 2^2 a_1$
$a_2 =$	$p_2 =$
$a_3 =$	$p_3 =$
....	...
$a_n =$	$p_n =$

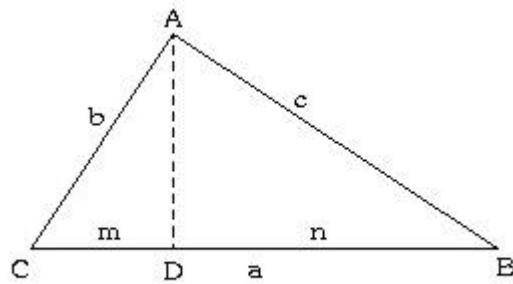
b) Obtén los resultados de un gran número de términos usando tu calculadora o el ordenador. ¿Cómo obtener aproximaciones de π ? ¿Qué precisión obtienes de π ? Compara con el valor que da tu calculadora

3. MÉTODO DE RECURRENCIA

Otra manera de obtener la sucesión de lados es mediante una ley de recurrencia. Para ello te vamos a plantear previamente varias cuestiones, que si estás muy puesto en semejanza te serán muy fáciles de contestar.

a) ¿Como son los lados y los ángulos de dos triángulos semejantes?

b) Indica razonadamente la semejanza de los triángulos ACD y ADB con el ABC, siendo el ángulo A=90°.

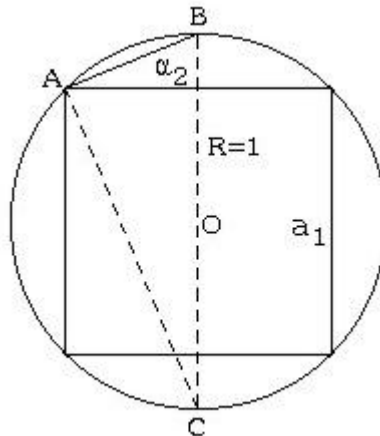


c) Justifica el 1^{er} teorema de Euclides: Un cateto de un triángulo rectángulo es media proporcional entre la hipotenusa y la proyección de este cateto sobre la hipotenusa (teorema del cateto).

d) ¿Cómo son los triángulos ACD y ADB? ¿Por qué?

e) Justifica el 2^o teorema de Euclides: La altura relativa a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es media proporcional entre las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa (teorema de la altura).

f) Si observas en la figura el triángulo ABC y aplicas los teoremas anteriores, podrás obtener una doble expresión de a_2 en función de a_1 . ¿Son las dos válidas? ¿Por qué?



g) ¿Cuál será entonces la ley de recurrencia? ¿Cuál será el perímetro? ¿Qué valores obtienes de p ? Utiliza tu calculadora o el ordenador para obtener muchos más términos.

h) ¿Tienes problemas? ¿Sabes a qué se deben?

i) Racionaliza la expresión de la ley de recurrencia del lado del polígono e intenta hallar el término general de p_{n+1} en el que aparezca en función de p_n y de a_n . Calcula ahora muchos términos. ¿Tienes problemas? ¿Qué ocurre en la fórmula si $a_n=0$?

j) Recuerda las fórmulas trigonométricas: $\sin\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}$ y

$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ ¿Sabrías pasar de la fórmula del término general de la sucesión a la ley de recurrencia

4. MÉTODO DE NEWTON

Recuerda el binomio de Newton: $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{n}b^n$, siendo

$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$ los números combinatorios válidos para números racionales.

a) Desarrolla $(1+x)^4$ y comprueba que los coeficientes son los que obtendrías con el triángulo de Pascal.

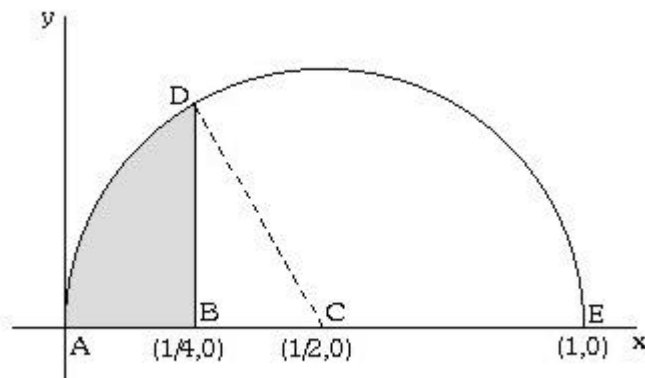
b) Desarrolla $(1+x)^{-3}$ hasta el 5º término aplicando el binomio de Newton.

c) Desarrolla $(1-x)^{1/2}$ hasta el 6º término aplicando el binomio de Newton.

d) Teniendo en cuenta $\sqrt{7} = \sqrt{9\frac{7}{9}} = 3\sqrt{1-\frac{2}{9}}$, ¿podrías utilizar el desarrollo anterior para obtener una aproximación del número irracional considerado?.

e) Utiliza el mismo método para aproximar $\sqrt{3}$ y compara con lo que dice tu calculadora.

f) Justifica que la ecuación de la semicircunferencia de la figura se puede expresar como $y = x^{1/2}(1-x)^{1/2}$.



g) Obtén la expresión polinómica de dicha función hasta el orden seis.

h) El área de la región ABD se puede obtener aplicando la regla de Barrow a la función anterior. ¿Qué valor aproximado obtienes?.

i) Demuestra mediante razonamientos geométricos que el área del triángulo DBC vale $\frac{\sqrt{3}}{32}$ y que el área del sector ACD es $\frac{\mathbf{p}}{24}$.

j) Si comparas el área ABD obtenida geoméricamente (utilizando el valor de $\sqrt{3}$ obtenido antes) con el valor aproximado obtenido con la regla de Barrow, obtendrás una buena aproximación de π .

Este método laborioso que has empleado fue el que utilizó Newton cuando el cálculo integral estaba en sus inicios y por supuesto no había calculadoras.