FIBONACCI Y EL NÚMERO DE ORO

1. Indicar el número de parejas de conejos en los sucesivos meses y encontrar la *ley de recurrencia*.

2. Adosando cuadrados de lados los sucesivos términos de la sucesión de *Fibonacci*, construir rectángulos cada vez más grandes. Tomando los vértices adecuados de los cuadrados generar la espiral correspondiente.

3. Obtener las razones entre dos términos consecutivos. ¿Hacia qué valor tiende?. ¿Y entre dos arcos de la espiral?. ¿Y entre las áreas de dos cuadrados?. ¿Y entre dos sectores de la espiral?.

4. Se sabe que una buena aproximación de la sucesión de *Fibonacci*, viene dada por la sucesión de término general:

$$G_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n + (-1)^n\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n\right].$$

a) Obtener los cuatro primeros términos desarrollando y simplificando la expresión.

b) Junto con tres términos más, obtenidos directamente de la expresión, representar en una misma gráfica los siete primeros términos de las sucesiones F_n y G_n. ¿Qué tipo de gráfico se obtiene?.

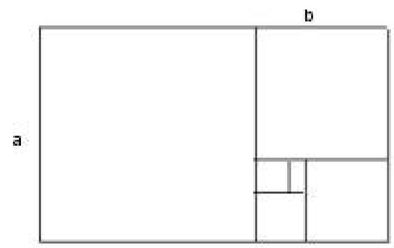
c) ¿Se puede tomar $G_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n$?. ¿En qué casos?.

d) Obtener, racionalizando si fuera necesario, las expresiones: $\frac{G_n}{G_{n+1}}$ y $\frac{G_{n+1}}{G_n}$.

e) Indicar exactamente, las expresiones a las que tienden las razones estudiadas en el ejercicio 3.

5. En el rectángulo de la figura de lados a+b y b , construimos otro rectángulo interior de dimensiones a y b. Si continuamos el proceso completar la tabla siguiente:

lado largo	a+b	a								
lado corto	a	b								



¿Qué dimensiones tendría el rectángulo anterior al inicial?. ¿Cuál es la ley de formación?.

6. El *rectángulo áureo* se define: Dos rectángulos consecutivos deben ser semejantes. Por tanto los lados homólogos han de ser proporcionales, y a la razón de semejanza se le llama *número de oro:*

$$f = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{1}{m}.$$

Resolver la ecuación anterior para obtener el valor del número de oro y su inverso.

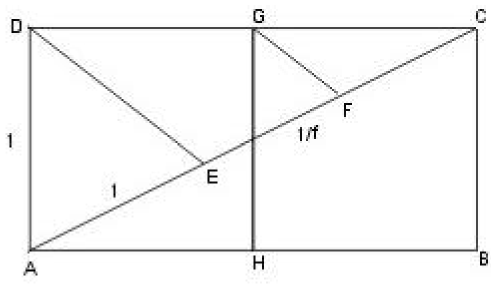
A ti, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de hermosura
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.

A ti, cárcel feliz de la retina,
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de mesura
que el universo armónico origina.

A ti, mar de los sueños angulares,
flor de las cinco formas regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.
Luces por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera transparente.
A ti, divina proporción de oro.

Rafael Alberti

7. En la figura aparece una construcción geométrica con regla y compás del número *m*. De esa manera los griegos obtuvieron el valor del inverso del número de oro. Justificar razonadamente que *EF*=*m*.



8. Desde la antigüedad se sabe que algunas partes del cuerpo humano guardan la proporción áurea. Por ejemplo en el dedo, entre la distancia entre la 1ª y la 2ª falange y entre la 2ª y la 3ª. Hacia 1850 *Zeysing* constató estadísticamente que el ombligo divide al cuerpo humano según la razón áurea. Comprobar lo anterior en vuestro propio cuerpo y anotar los resultados.

9. A partir de la definición del número de oro, justificar $f = 1 + \frac{1}{f}$. Esta expresión permite obtener el número f de otra manera: Consideremos la expresión recurrente $f_{i+1} = 1 + \frac{1}{f_i}$ y tomemos como primer valor la unidad. Este método lo utilizó *Girard* en el siglo XVII, pero la demostración de la convergencia lo hizo *Simson* 100 años después.

a) Observar que la sucesión obtenida converge a f y hacer la representación gráfica del proceso.

b) Repetir el proceso con otra expresión recurrente que también converja a f .

c) Intentar aproximar m utilizando el método anterior.

10. Si $m^2 = m-1$. ¿Cuánto valdrán m^3, m^4, m^5?. Si $f = 1 + m$. ¿Cuánto vale f^2, f^3, f^4 ?. Escribir una fórmula general para cada caso.

11. La sucesión de restos módulo 2 de la sucesión de *Fibonacci* es 1,1,0,1,1,0..., por tanto periódica. Encontrar las sucesiones de restos módulo 3, 4 5 y 6 y verificar que si n es el módulo, el período no excede de n^2+1.