Un poco de historia

Jakob Bernouilli (1654-1705) es junto a su hermano Johann uno de los miembros más destacados de la familia suiza que durante dos siglos dominó el conocimiento de las matemáticas.

Su obra **Ars cojectandi** publicada ocho años por su sobrino Nicolaus I, después de su muerte, se considera el primer tratado importante sobre la teoría de probabilidades.

Consta de cuatro partes. En la primera se incluyen los trabajos de Huygens junto con un comentario personal sobre la obra del autor e introduce los llamados números de Bernouilli.

La segunda incluye una teoría general acerca de la Combinatoria que le permite dar el paso para el estudio de las distribuciones binomial y normal.

Las partes tercera y cuarta están dedicadas exclusivamente a la teoría de probabilidades, estudiando en esta última la ley de los grandes números.

Distribuciones de probabilidad

Variable aleatoria X es la variable asociada a un experimento aleatorio. Puede ser discreta o continua.

Si la variable es discreta se definen:

Función de probabilidad es la función $f(x_i)$ que asigna cada valor de la variable discreta x_i su probabilidad: $f(x_i) = P(X = x_i) = p_i$ con $\sum_i p_i = 1$.

Función de distribución es la función que determina la probabilidad de que la variable discreta X tome un valor menor o igual que x_i: $F(x_i) = P(X \le x_i)$.

Si la variable es continua se definen:

Función de probabilidad también llamada función densidad es la función $f(x)$ tal que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1$ siendo $f(x) \ge 0$.

Función de distribución determina la probabilidad de que la variable continua X tome un valor menor o igual que a: $F(a) = P(X \le a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ y es por tanto una primitiva de la función densidad.

Dependiendo del tipo de variable aleatoria, las distribuciones de probabilidad pueden ser discretas o continuas.

Como ejemplos más representativos de cada tipo de variables están la distribución discreta “Binomial” y la distribución continua “Normal”.

Distribución binomial

Supongamos que un experimento aleatorio tiene las siguientes características:

- En cada prueba del experimento sólo son posibles dos resultados: el suceso *A* (éxito) y su contrario *A'* (fracaso).
- El resultado obtenido en cada prueba es independiente de los resultados obtenidos anteriormente.
- La probabilidad del suceso A es constante, la representamos por p, y no varía de una prueba a otra. La probabilidad de *A'* es $1- p$ y la representamos por q.
- El experimento consta de un número n de pruebas.

Todo experimento que tenga estas características diremos que sigue el modelo de la ***distribución Binomial***. A la variable X que expresa el número de éxitos obtenidos en cada prueba del experimento, la llamaremos ***variable aleatoria binomial***.

La variable binomial es una variable aleatoria discreta, que sólo puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4, ..., n suponiendo que se han realizado n pruebas.

La distribución Binomial se suele representar por $B(n,p)$ siendo n y p los parámetros de dicha distribución.

Función de probabilidad de la distribución Binomial o también denominada función de la distribución de Bernoulli (para n=1) con $0 \le p \le 1$.

Probabilidad de obtener k-éxitos: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

Parámetros de la Distribución Binomial

Media	Varianza	Desviación típica
$\mu = np$	$\sigma^2 = npq$	$\sigma = \sqrt{npq}$

Función de distribución

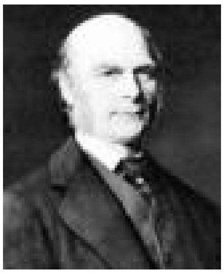
$$F(x_i) = P(X \le x_i) = \binom{n}{0} p^0 q^n + \binom{n}{1} p^1 q^{n-1} + \cdots \binom{n}{i} p^i q^{n-i}.$$

Aparato de Galton

El funcionamiento de este artilugio es el siguiente:

Se sitúa verticalmente y por el embudo de la parte superior se echan un montón de perdigones que van cayendo y se recogen en las casillas inferiores.

Al chocar con cada hexágono, el perdigón tiene un 50% de probabilidad de ir a la izquierda o a la derecha.



Las posibilidades de caer en cada casillero se ajustan a los números combinatorios y se simula así el triángulo de Pascal o Tartaglia.

En el aparato de Galton de la imagen cada $2^4=16$ perdigones, deberían repartirse en cada casillero de la siguiente manera: $\binom{4}{0}=1$, $\binom{4}{1}=4$, $\binom{4}{2}=6$, $\binom{4}{3}=4$, $\binom{4}{4}=1$.

Si se repite la experiencia con aparatos de Galton de distintos niveles se pueden comprobar las propiedades de los números combinatorios.

Este aparato permite simular distribuciones binomiales siempre que el número de perdigones sea suficientemente grande.

Números combinatorios

El factorial de un número natural n es $n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)...3\cdot2\cdot1$ y que por convenio $0!=1$.

Se define el número combinatorio $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \dfrac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)...(n-k+1)}{k\cdot(k-1)...3\cdot2\cdot1}$.

Las propiedades: a) $\binom{n}{0}=1$ b) $\binom{n}{1}=n$ c) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ d) $\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$.

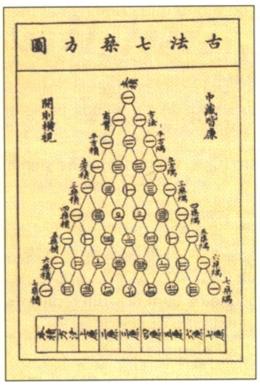
Los números combinatorios aparecen en el desarrollo de binomio de Newton:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 ... + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

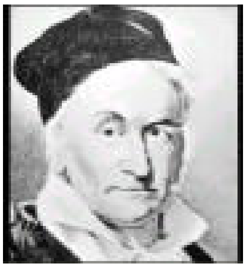
A partir de las fórmulas anteriores se pueden obtener:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$

Estas propiedades se pueden comprobar en el triángulo de Pascal o de Tartaglia.



Distribución normal o Gaussiana



Esta distribución es frecuentemente utilizada en las aplicaciones estadísticas. Su propio nombre indica su extendida utilización, justificada por la frecuencia o normalidad con la que ciertos fenómenos tienden a parecerse en su comportamiento a esta distribución.

Muchas variables aleatorias continuas presentan una función de densidad cuya gráfica tiene la forma de campana de una distribución normal, como:

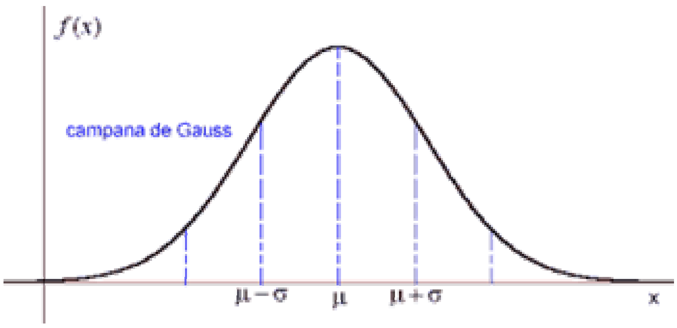
- *Caracteres morfológicos* de individuos (personas, animales, plantas,...) de una especie como tallas, pesos, envergaduras, diámetros, perímetros, etc.
- *Caracteres fisiológicos*, como el efecto de una misma dosis de un fármaco, o de una misma cantidad de abono.
- *Caracteres sociológicos*, como el consumo de cierto producto por un mismo grupo de individuos, puntuaciones de examen.
- *Caracteres psicológicos*, como el cociente intelectual, grado de adaptación a un medio, etc.
- *Errores* cometidos al medir ciertas magnitudes.
- *Valores estadísticos* muestrales, como la media.
- *Otras distribuciones* como la binomial o la de Poisson son aproximaciones normales.

Y en general cualquier característica que se obtenga como suma de muchos factores.

La distribución normal queda definida por dos **parámetros**, su media μ y su desviación típica σ y se representa así $N(\mu,\sigma)$.

Función densidad

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



La función tiene las siguientes propiedades:

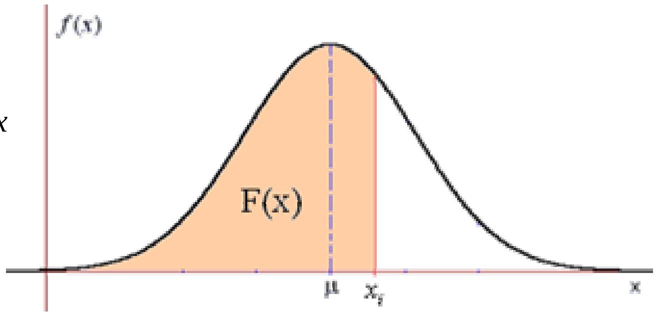
- Dominio: *R*
- Máximo: $\left(\mu,\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$
- Puntos de inflexión: en $x=\mu-\sigma$ y en $x=\mu+\sigma$

- Asíntota: el eje *OX* es una asíntota horizontal
- Simetría: respecto a la recta $x = \mu$
- Monotonía: creciente en $(-\infty, \mu)$ y decreciente en $(\mu, +\infty)$
- Signo: siempre positiva

Función de distribución

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

con $-\infty < x < \infty$

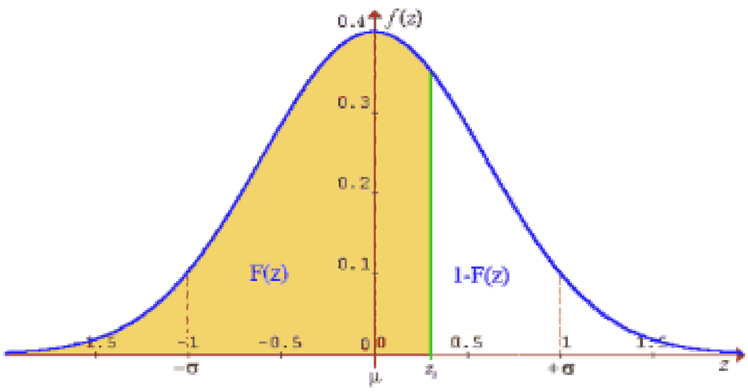


Tipificación

Si la variable es *X* en $N(\mu,\sigma)$ entonces la variable tipificada es $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ que sigue también una distribución normal N(0,1).

Por tanto su función de densidad es $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$ con $-\infty < z < \infty$ y su función de distribución es $F(z) = P(Z \le z) = \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$,

siendo la representación gráfica de esta función:



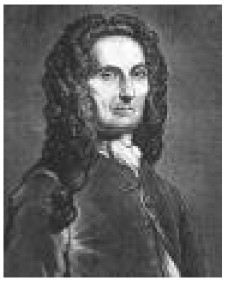
A la variable Z se la denomina *variable tipificada de X*, y a la curva de su función de densidad *curva normal tipificada*. Existen unas tablas de la curva normal tipificada que permite resolver cualquier distribución normal.

Característica de la distribución normal tipificada (reducida, estándar)

- No depende de ningún parámetro
- Su media es 0, su varianza es 1 y su desviación típica es 1.
- La curva *f(x)* es simétrica respecto del eje OY
- Tiene un máximo en este eje
- Tiene dos puntos de inflexión en $z = 1$ y $z = -1$

Aproximación de la Binomial por la Normal

Se conoce como teorema de De Moivre.



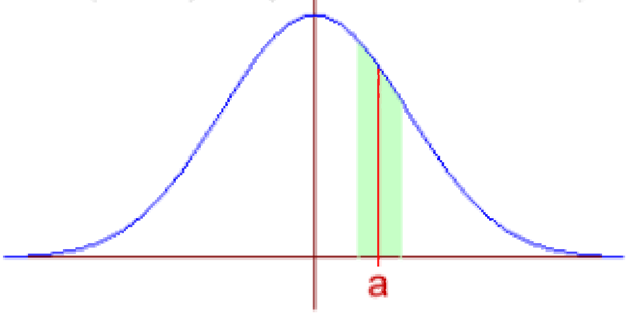
Demostró que bajo determinadas condiciones (para *n* grande y tanto *p* como *q* no estén próximos a cero) la distribución Binomial B(n, p) se puede aproximar mediante una distribución normal $N(np, \sqrt{npq})$.

Debemos tener en cuenta que cuanto mayor sea el valor de *n*, y cuanto más próximo sea *p* a 0.5, tanto mejor será la aproximación realizada. Es decir, basta con que se verifique $np \geq 5 \ y \ nq \geq 5$.

Gracias a esta aproximación es fácil hallar probabilidades binomiales, que para valores grandes de n resulten muy laboriosos de calcular.

Hay que tener en cuenta que para realizar correctamente esta transformación de una variable discreta (binomial) en una variable continua (normal) es necesario hacer una corrección de continuidad, llamada de Yates:

$$P(X = a) = P(a - 0.5 \leq X \leq a + 0.5)$$



Es decir, se sustituye el valor discreto “a” de la binomial por un intervalo continuo.