CÓNICAS CON MS EXCEL

1. UN POCO DE HISTORIA

Una de las pocas obras conservadas de Apolonio, aunque una de sus obras fundamentales, es las *Cónicas*. De todas formas sólo se conserva en el original griego la mitad, los cuatro primeros de sus ocho libros; pero por suerte un matemático árabe, Thabit ibn Qurra, tradujo los tres libros siguientes al árabe antes de que despareciera su versión griega, y esta traducción se ha conservado. En 1710, Edmund Halley publicó una traducción al latín de los siete libros, y desde entonces se han publicado muchas versiones en lenguas modernas.

Las secciones cónicas se conocían ya desde hacía más o menos un siglo y medio cuando Apolonio compuso su famosos tratado sobre estas curvas, y durante este intervalo por lo menos dos veces se escribieron tratados generales sobre el tema, debidos a Aristeo y a Euclides, pero de la misma manera que los *Elementos* de Euclides habían eclipsado a todos los textos elementales anteriores, así también en el nivel más avanzado de la teoría de las secciones cónicas, las *Cónicas* de Apolonio desplazaron a todos sus rivales en este campo, incluyendo las *Cónicas* de Euclides, y al parecer no se hizo ningún otro intento de mejorarlas en la antigüedad. Si la supervivencia es en algún sentido una medida de la calidad, entonces los *Elementos* de Euclides y las *Cónicas* de Apolonio fueron sin duda las mejores obras en su género en la matemática antigua.

El libro I de las *Cónicas* comienza con una exposición de los motivos para escribir la obra. Así sabemos que mientras Apolonio estaba en Alejandría fue visitado por un geómetra llamado Naucrates, y fue a petición de este último que Apolonio escribió un apresurado borrador de las *Cónicas* en ocho libros. Más tarde, ya en Pérgamo, Apolonio se tomó el tiempo necesario para pulir cuidadosamente estos libros, uno por uno, lo que explica el hecho de que los Libros IV y VII comiencen con dedicatorias y agradecimientos al rey Atalo de Pérgamo. Los cuatro primeros libros los describe el autor como constituyendo una introducción elemental, y se supone generalmente que la mayor parte del material que contienen había aparecido publicado ya en anteriores tratados sobre cónicas. Sin embargo, Apolonio nos dice expresamente que algunos de los teoremas contenidos en el Libro III son suyos propios, ya que Euclides no había dado un tratamiento completo de los lugares geométricos que se consideran en él. Apolonio afirma que los cuatro últimos libros son extensiones de la materia que van más allá de lo esencial, y efectivamente, en ellos la teoría avanza en direcciones más especializadas.

Anteriormente a Apolonio la elipse, la parábola y la hipérbola se obtienen como secciones por medio de un plano de tres tipos de conos circulares rectos distintos según el ángulo en el vértice fuese agudo, recto u obtuso. Parece ser que Apolonio demostró por primera y de una manera sistemática que no es necesario considerar exclusivamente secciones perpendiculares a una generatriz del cono, y que de un cono único pueden obtenerse los tres tipos de secciones cónicas sin más que variar la inclinación del plano que corta al cono; éste era un paso muy importante en el proceso de unificar los tres tipos de curvas en cuestión. Otra generalización importante se llevó a cabo cuando Apolonio demostró que el cono no necesita ser un cono recto, es decir, tal que su eje sea perpendicular al plano de se base circular, sino que puede igualmente tomarse de entrada un cono circular oblicuo o escaleno. Si Eutocio, en sus comentarios sobre las *Cónicas*, estaba bien informado, podemos asegurar que Apolonio fue el primer geómetra que demostró que las propiedades de estas curvas son las mismas, se obtengan como secciones de conos oblicuos o de conos rectos. Por último, Apolonio llevó el estudio de las antiguas curvas a un punto de vista más moderno al sustituir el cono de una sola hoja por un cono de dos hojas (par de conos orientados en sentido opuesto, con vértices coincidentes y ejes sobre la misma recta). De hecho, Apolonio da la misma definición de cono circular que se utiliza actualmente:

Si una línea recta de longitud indefinida y que pasa siempre por un punto fijo se hace mover sobre la circunferencia de un círculo que no está en el mismo plano que el punto dado, de tal manera que pase sucesivamente por todos los puntos de dicha circunferencia, entonces la recta móvil describirá la superficie de un cono doble.

Este cambio en el punto de vista convierte a la hipérbola en la curva de dos ramas tal como la conocemos hoy: Hasta entonces los geómetras solían hablar de "las dos hipérbolas" en vez de "las dos ramas" de una hipérbola única, pero en cualquier caso el carácter dual de la curva fue reconocido claramente a partir de Apolonio.

Fuente: Historia de la matemática (Carl. B. Boyer)

3. LUGARES GEOMÉTRICOS

Otro enfoque permite tratar a las cónicas como lugares geométricos, es decir, como conjunto de puntos que cumplen una propiedad determinada:

Elipse es el lugar geométrico de los puntos de un plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

Circunferencia es el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a un punto fijo, llamado centro, es constante.

Hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

Parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que están a igual distancia de un punto fijo, llamado foco, y una recta dada, llamada directriz.

Al introducir un sistema de referencia podemos obtener las ecuaciones canónicas de las cónicas y hacer su representación gráfica.

NOTA: Ver el modelo de MS Excel *CÓNICAS: Elipse, Parábola e Hipérbola* descargable en la web del departamento.

3. ORIGEN DE SUS NOMBRES

No hay duda de que a lo largo de la historia de la matemática los conceptos han sido mucho más importantes que la terminología utilizada, pero no obstante el cambio de nombre de las secciones cónicas debido a Apolonio tiene una importancia mayor que la usual. Durante un siglo y medio aproximadamente estas curvas no tuvieron otro nombre específico más que descripciones triviales de la manera como habían sido descubiertas: secciones de un cono agudo (u oxitoma), secciones de un cono rectángulo (u ortoma) y secciones de un cono obtuso (o amblitoma).

Arquímedes continuó utilizando estos nombres, aunque según parece también usó ya el nombre de parábola, como sinónimo para una sección de un rectángulo. Pero fue realmente Apolonio, posiblemente siguiendo una sugerencia de Arquímedes, quién introdujo por primera vez los nombres de elipse y de hipérbola en conexión con estas curvas. Las palabras "elipse", "parábola" e "hipérbola" no eran nuevas en absoluto y acuñadas para la ocasión, sino que fueron adaptadas a partir de un uso anterior, debido quizá a los pitagóricos en la solución de ecuaciones cuadráticas por el método de aplicación de áreas. "Ellipsis", que significa una deficiencia, se utilizaba cuando un rectángulo dado debía aplicarse a un segmento dado y resultaba escaso en un cuadrado (u otra figura dada). Mientras que la palabra "Hyperbola" (de "avanzar más allá") se adoptó para el caso en que el área excedía del segmento dado, y por último la palabra "Parábola" (de "colocar al lado" o "comparar") indicaba que no había ni deficiencia ni exceso. Apolonio aplicó estas palabras en un contexto nuevo, utilizándolas como nombres para las secciones cónicas.

La conocida ecuación moderna de la parábola con vértice en el origen y eje el eje de abcisas es $\mathbf{y^2 = kx}$, donde **k** es el llamado "latus rectum" o parámetro, que suele representarse por **2p** y a veces por **4p**; es decir, la parábola tiene la propiedad característica de que para todo punto tomado sobre la curva, el cuadrado construido sobre su ordenada **y** es exactamente igual al rectángulo construido sobre la abscisa **x** y el parámetro **k**. Las ecuaciones de elipse y de hipérbola, referidas análogamente a uno de sus vértices como origen son:

$$\frac{(x \mp a)^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{o bien} \quad y^2 = kx \mp \frac{b^2 x^2}{a^2}$$

donde **k** es de nuevo el "latus rectum" o parámetro $\frac{2b^2}{a}$. Es decir, en el caso de la elipse $y^2<kx$, mientras que para la hipérbola $y^2>kx$, y son estas propiedades de las curvas que están expresadas por las respectivas desigualdades las que sugirieron los nombres dados por Apolonio hace más de dos milenios a las secciones cónicas, nombres tan afortunados que han quedado firmemente asociados a ellas hasta hoy.

Fuente: Historia de la matemática (Carl. B. Boyer)

NOTA: Ver el modelo de MS Excel *CÓNICAS: Origen de sus nombres* descargable en la web del departamento.