CAOS Y EL EFECTO MARIPOSA
Soluciones

Solución 1

a) Para cualquier valor inicial el sistema converge al valor 0,739085... que es un atractor del mismo.

b) En este caso los valores $x_o=1$ y $x_o=-1$ son puntos fijos, pero para los demás se produce un ciclo de período 2.

c) Los valores $x_o=0$ y $x_o=1$ son también puntos fijos, pero $x_o=-1$ también lo es a partir de la 2ª iteración. En los demás casos: si $0<x<1$ y $-1<x<0$ converge a cero, si $x>1$ tiende a infinito y si $x<-1$ oscila entre más infinito y menos infinito.

Solución 2

a) Al ser k=2 la población se duplica cada vez, siendo su fórmula $x_n=2^n x_o$ y en general será $x_n=k^n x_o$.

b) Al duplicarse, el aumento es del 100%, al triplicarse el aumento es del 200% etc. Por tanto el tanto por uno de crecimiento es k-1.

Solución 3

a) *k positivo*

Si k>1 la población crece exponencialmente.
Si k<1 la población se extingue.
Si k=1 permanece constante.

b) *k negativo*

Si k<-1 oscila entre valores positivos y negativos pero tiende a cero.
Si k>-1oscila cada vez más entre más infinito y menos infinito.
Si k=-1 se produce un ciclo entre dos valores opuestos, y sus valores dependen de x_o.

c) *k nulo*

Si k=0 se extingue.

Solución 4

a) Se estabiliza en 350 individuos. Con 20 inmigrantes anuales seguiríamos estables en 100 individuos.

b) La tasa será k=0,7 y se conseguirá al cabo de 15 años con una inmigración constante de 60 personas.

Solución 5

a) Si b=5 $x_o=10$ se obtiene la ley $x_n=10+5n$ y en general será $x_n=a_o+bn$.

b) Si $x_1=kx_o+b$, $x_2=k(kx_o+b)+b=k^2x_o+kb+b$, ... $x_n=k^n xo+b(k^{n-1}+k^{n-2}+...k+1)$ y aplicando la suma de los términos de una progresión geométrica se obtiene

$$x_n = x_0 \cdot k^n + \frac{b\left(k^n - 1\right)}{k-1} \; si \; k \neq 1$$

Solución 6

a) Si $0 \leq c \leq 1$, converge a cero para todo valor de P_o

b) Si $1<c<3$, converge a $1-\frac{1}{c}$, para cualquier valor de P_o.

C	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,50	2,75
atractor	0,2	0,333	0,428	0,5	0,555	0,6	0,636

c) Si c=3 aparece un comportamiento periódico entre 0,69 y 0,63 para todo P_o. Si c<3,5 sigue el mismo tipo de comportamiento pero con oscilaciones cada vez mayores.

d) Si c=3,5 aparece un periodo 4: 0,82; 0,50; 0,87; 0,38.

c	3,5	3,627	3,702	3,74	3,83
período	4	6	7	5	3

e) El comportamiento es aparentemente caótico o los ciclos son muy largos y no se visualizan en pantalla. Por ejemplo para Po=0,7 y c=3,8.

Solución 7

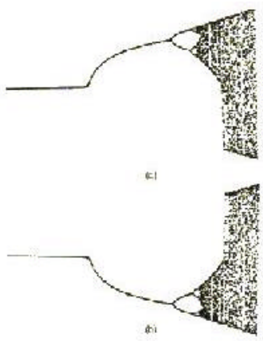
En el primer caso se produce una divergencia (efecto mariposa) y la constante de Liapunov que la mide da un valor positivo. En cambio en el otro caso pese a ser la distancia entre los valores de salida apreciable el error final es muy pequeño (atractor) y por eso la constante de Lyapunov es negativa. Si se ensaya con valores muy próximos de órbitas estables el error final puede ser cero y en ese caso en el valor de la casilla de la constante de Liapunov aparece la palabra “atractor”.

Parámetro	C	Po	P'o	Error inicial	Error final	Cte Liapunov
Efecto mariposa	4	0,2	0,19999	1E-05	0,034525654	0,162937457
Atractor	3,2	0,2	0,3	0,1	1,11022E-16	-0,68868431

Solución 8

En el gráfico de telaraña se observa, por ejemplo, tomando Po=0,5 que para c=3,238 el período es 2, en c=3,500 el período es 4 y en c=3,556 el período es 8. Asi calculamos d_1=4,678 aproximación obtenida con sólo el primer término de la sucesión.

Solución 9



Si k=0 las series temporales tienden a cero.

Si k=0,5 las series temporales tienden a cero.

Si k=1 las series temporales decrecen muy lentamente.

Si k=1,5 las series se estabilizan entorno 0,6 y –0,6.

Si k=2 las series tienen un comportamiento periódico pero con oscilaciones cada vez menores entorno a 0,7 y –0,7.

Si k=2,5 el comportamiento de ambas series es caótico.

Si k=3 el comportamiento es caótico, pero los valores de las series van cambiando de signo. Este comportamiento se inicia en los valores 2,6 y –2,6 en el valor Po=0,5 y a partir de de ellos para cualquier valor de Po.

Solución 10

Los valores obtenidos en la tabla no dependen de las condiciones iniciales del sistema:

k	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
Evolución	0	0	0	0,364	0,5	0,581	0,635	Periódica	Caos	caos

b) Si k=0,4 y tomamos Po=0,6 y P'o=0,601 se tiene un E_i=0,001 y un E_f=5,55112E-17 comportándose como un atractor y en consecuencia la constante de Liapunov será negativa l=-0,305221925. Si k=0,9 y tomamos Po=0,8 y P'o=0,8001 se tiene un E_i=1E-04 y un E_f=0,151940232 manifestándose el "efecto mariposa" y por tanto la constante de Liapunov será positiva l=0,073260723.

c) En el gráfico de telaraña se observa, por ejemplo, tomando Po=0,5 que para c=0,7764 el período es 2, en c=0,8470 el período es 4 y en c=0,8621 el período es 8. Asi calculamos la aproximación d_1=4,675 de la constante del caos.