

<b>Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud</b>	
<b>Soluciones</b>	<b>Septiembre de 2011</b>

**Opción A**

**Problema 1.** a)  $B = A - kI = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & -2 \\ 1 & 3-k \end{pmatrix}$ . Para que exista la

matriz inversa:  $|B| = \begin{vmatrix} -k & -2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = k^2 - 3k + 2 = (k-1)(k-2) \neq 0$ . Hay matriz inversa

si  $k \neq 1, 2$ .

b) Si  $k = 3$ ,  $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  y  $B^{-1} = \frac{1}{|B|} (A^*)^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$ .

c) Si  $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ , se tiene:

$\alpha \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} -2\alpha & -6\alpha - 2\beta \\ 3\alpha + \beta & 7\alpha + 3\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$  y por la

igualdad de matrices se obtiene  $\alpha = 1$  y  $\beta = -3$ .

d)  $P^2 = (I - M)(I - M) = I - 2M + M^2 = I - 2M + M = I - M = P$

$$MP = M(I - M) = M - M^2 = M - M = 0$$

$$PM = (I - M)M = M - M^2 = M - M = 0$$

**Problema 2.** a) El vector  $\vec{v}_r = (1, 2, 1)$  y el vector  $\vec{v}_s = (-2, 1, 3)$  pues la recta  $s$  en

paramétricas es:  $\begin{cases} x = 1 - 2s \\ y = s \\ z = 2 + \alpha + 3s \end{cases}$ . Las rectas no son paralelas:  $\frac{1}{-2} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{1}{3}$  y por

tanto se cortan:  $\begin{cases} 3 + t = 1 - 2s \\ -1 + 2t = s \\ 2 + t = 2 + \alpha + 3s \end{cases}$  para  $t = 0, s = -1, \alpha = 3$ , en el punto  $P(3, -1, 2)$ .

b) La ecuación del plano viene determinada por los vectores dirección de las rectas

y el punto P:  $\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$  y es en forma general  $x - y + z - 6 = 0$ .

c) El vector normal del plano es el director de la recta  $\vec{n} = (1, 2, 1)$  y al pasar por el punto  $(1, 2, 1)$ :  $x + 2y + z + D = 0$ ;  $1 + 2 \cdot 2 + 1 + D = 0$ ;  $D = -6$ ;  $x + 2y + z - 6 = 0$ .

**Problema 3.** a) dominio  $D = \mathfrak{R}$  y recorrido  $R = [0, \infty)$ .

b)  $y' = (2x - x^2)e^{-x} = x(2 - x)e^{-x}$ , que se anula en  $x=0$  y  $x=2$ .

$y'' = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$  y se tiene que:

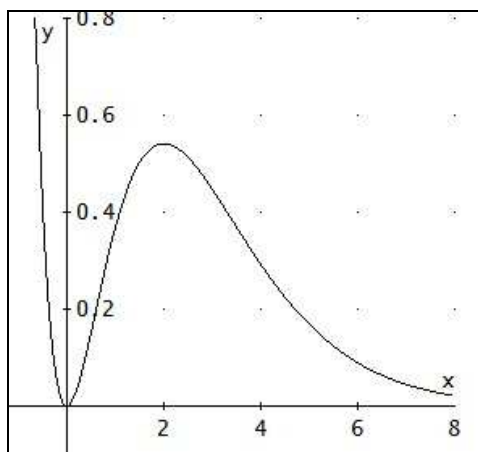
$y''(0) > 0$  mínimo en  $(0,0)$  y  $y''(2) < 0$  máximo en  $(2, 4e^{-2})$ .

c)  $(-\infty, 0)$   $y' < 0$ , decreciente;  $(0, 2)$   $y' > 0$ , creciente;  $(2, \infty)$   $y' < 0$ , decreciente.

d)  $y'' = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$ , se anula en  $x = 2 - \sqrt{2}$  y en  $x = 2 + \sqrt{2}$ .

Como en  $(-\infty, 2 - \sqrt{2})$   $y'' > 0$ ,  $(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$   $y'' < 0$ ,  $(2 + \sqrt{2}, \infty)$   $y'' > 0$ , entonces los puntos donde se anula la 2ª derivada son puntos de inflexión.

e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0$ , aplicando la regla de L'Hôpital.



### Opción B

**Problema 1.** a)  $\left| \frac{1}{2}T \right| = \left( \frac{1}{2} \right)^3 |T| = \frac{1}{8} \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{8}$ .

b)  $|M^4| = |M|^4 = 6^4 = 1296$ , pues  $|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6$ .

c) como  $|T^{-1}| = \frac{1}{|T|}$ , se tiene que  $|TM^3T^{-1}| = |T||M|^3 \frac{1}{|T|} = |M|^3 = 6^3 = 216$ .

**Problema 2.** a) Sustituyendo el punto  $(1,1,0)$  en la ecuación del plano:

$(2 + 2\alpha) \cdot 1 + 1 + \alpha \cdot 0 - 2 - 6\alpha = 0$ , se obtiene  $\alpha = \frac{1}{4}$ . Sustituyendo este valor en la

familia de planos se obtiene  $10x + 4y + z - 14 = 0$ .

b) El vector normal de la familia de planos dependientes de  $\alpha$  es  $(2+2\alpha, 1, \alpha)$  y vector  $\vec{v} = (4, 1, 1)$  de la recta  $r$  que tiene la siguiente expresión en paramétricas:

$$\begin{cases} x = 4t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \text{ deben ser perpendiculares. Por tanto se debe cumplir } (4, 1, 1) \cdot (2 + 2\alpha, 1, \alpha) = 0$$

Se obtiene  $\alpha = -1$  y al sustituir el valor se obtiene el plano:  $y - z + 4 = 0$ .

c) El vector normal del plano y el vector director de la recta han de ser paralelos:

$$\frac{2+2\alpha}{4} = \frac{1}{1} = \frac{\alpha}{1}. \text{ Al ser } \alpha = 1, \text{ se obtiene el plano: } 4x + y - z - 8 = 0$$

**Problema 3.** a) La función es la distancia entre el punto fijo  $A(0,9)$  y el punto

$$B\left(x, \frac{36-x^2}{2}\right) \text{ de la parábola: } f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^4 - 32x^2 + 324} \text{ con } x \in [-6, 6]$$

$$b) f'(x) = \frac{1}{2} \frac{4x^3 - 64x}{\sqrt{x^4 - 32x^2 + 324}} = \frac{x^3 - 16x}{\sqrt{x^4 - 32x^2 + 324}} = \frac{x(x-4)(x+4)}{\sqrt{(x^2-16)^2 + 68}}$$

Se anula  $x=0, -4, 4$ . Y como:

$(-6, -4)$   $y' < 0$  decreciente;  $(-4, 0)$   $y' > 0$  creciente

$(0, 4)$   $y' < 0$  decreciente;  $(4, \infty)$   $y' > 0$  creciente

Presenta los mínimos relativos en  $f(-4) = f(4) = \sqrt{17}$

c) Añadiendo los valores  $f(0) = 9$ ,  $f(-6) = f(6) = \sqrt{117}$

Se observa que la mayor distancia es  $\sqrt{117}$  y la menor distancia es 9.

$$d) \int_{-6}^6 \left(\frac{36-x^2}{2}\right) dx = 2 \int_0^6 \left(18 - \frac{x^2}{2}\right) dx = 2 \left(18x - \frac{x^3}{6}\right) \Big|_0^6 = 144$$

