Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones	**Junio de 2011**

OPCIÓN A

Problema 1. a) Si en la expresión matricial del sistema $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 2 & 0 & 3 & 2m+1 \\ 1 & 3 & m-2 & m-1 \end{pmatrix}$

hacemos m=2, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, el sistema

es compatible indeterminado: $-2y+z=1$; $z=1+2y$; $x+y+1+2y=z$; $x=1-3y$.

Por tanto las soluciones son: $(1-3t,t,1+2t)$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 2 & 0 & 3 & 2m+1 \\ 1 & 3 & m-2 & m-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & m-3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & m-2 & 0 \end{pmatrix}$. Por tanto

si $m \neq 2$, el sistema es compatible y determinado pues el r(A)=r(B)=3.

c) Sustituyendo en las ecuaciones: $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=m$; $3+0=2m+1$; $\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=m-1$ -Por tanto m=1.

Problema2. Las rectas en paramétricas son $r \equiv \begin{cases} x=2-t \\ y=4-t \\ z=t \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=s \\ y=-3+2s \\ z=1-s \end{cases}$

a) Los puntos y vectores directores son: $r \equiv \begin{cases} A(2,4,0) \\ \vec{u}=(-1,-1,1) \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} B(0,-3,1) \\ \vec{v}=(1,2,-1) \end{cases}$

b) Resolviendo el sistema $\begin{cases} 2-t=s \\ 4-t=-3+2s \\ t=1-s \end{cases}$ vemos que es incompatible y como las rectas no son paralelas (vectores dirección no proporcionales), las rectas se cruzan.

c) $\begin{vmatrix} x-2 & y-4 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0$ y se obtiene el plano: x=2.

Problema3. a) $D = \Re - \{1,2\}$ y las asíntotas verticales son x=1 y x=2.

Como el $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-3x+2} = 0$, la asíntota horizontal es y=0.

b) Como $f'(x) = \frac{2-x^2}{(x^2-3x+2)^2}$ se anula en $x = -\sqrt{2}\ y\ x = \sqrt{2}$, se obtiene:

$(-\infty,-\sqrt{2})\ y'<0$ decreciente; $(-\sqrt{2},1)\ y'>0$ creciente; $(1,\sqrt{2})\ y'>0$ creciente; $(\sqrt{2},2)\ y'<0$ decreciente; $(2,\infty)\ y'<0$ decreciente.

c) $\frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$ se obtiene. A=-1 y B=2. Por tanto:

$$\int \frac{x}{(x-1)(x-2)}dx = -\int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x-2} = -L|x-1| + 2L|x-2| + C .$$

OPCIÓN B

Problema1. a) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2-1 \end{vmatrix} = -m(m^2+1)$. Si $m \neq 0$ el rango de la matriz es 3.

Si $m = 0$, se tiene $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y el rango de la matriz es 2.

b) La matriz tiene inversa porque para m=1 su determinante no es nulo.

c) El determinante de la matriz: $|A| = -2$ y los adjuntos: $A_{11} = 0;\ A_{12} = 0;\ A_{13} = -2;$ $A_{21} = 1;\ A_{22} = -2;\ A_{23} = 1;\ A_{31} = -1;\ A_{32} = 0;\ A_{33} = -1.$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad AA^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}A$$

Problema2. a) El vector de la recta *r* es $\vec{u} = (1,-1,0)$ y de la recta *s* es $\vec{v} = (1,1,1)$.

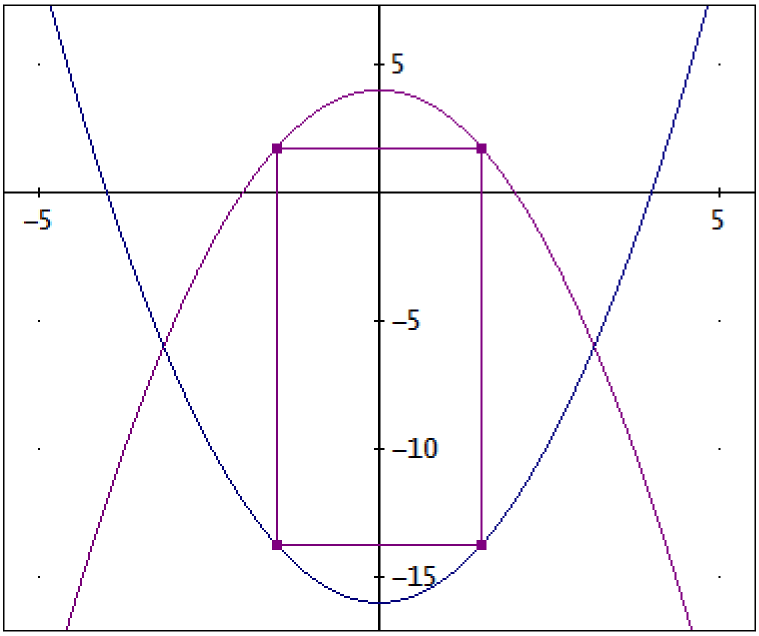
b) El vector de la recta *r* es el vector normal del plano: $x - y + D = 0$. Al pasar por el punto $(0,1,3)$, se obtiene *D=1*. EL plano es *x-y+1=0*.

c) Al resolver el sistema $\begin{cases} t = 1 + s \\ 1 - t = s \\ 3 = 3 + s \end{cases}$ se obtiene *t=1* y *s=0*. El punto es *P(1,0,3).*

La ecuación del plano que contiene a *r* y a *s*:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x + y - 2z + 5 = 0 .$$

Problema3. a) La función área es $S(x) = 2x(-2x^2 + 20)$, siendo $2x$ la base del rectángulo y $4 - x^2 - (x^2 - 16) = -2x^2 + 20$ la altura del rectángulo.



b) Derivando: $S(x) = -4x^3 + 40x$, e igualando a cero, $S'(x) = -12x^2 + 40 = 0$ se obtiene $x = \sqrt{\frac{10}{3}}$. Como $S''(x) = -24x$, se obtiene $S''\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right) < 0$ y por tanto corresponde a un máximo.

c) Su valor es: $S\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right) = -4\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right)^3 + 40\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right) = 80\sqrt{\frac{10}{3}}$.