Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones	**Junio de 2010**

OPCIÓN A

Problema 1. a) $A(A-2I)=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&3&2\\-3&-3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\2&1&2\\-3&-3&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=-I$,

y $(A-I)^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\-3&-3&-3\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

b) $A(A-2I)=-I$ y $|A||A-2I|=|-I|=-1\neq 0$, por tanto los determinantes de A y de $A-2I$ no pueden ser nulos y en consecuencia las matrices A y $A-2I$ tienen inversa. En cambio $|A-I|=0$ por tener la matriz filas proporcionales y $A-I$ no tiene inversa.

c) $A^{-1}=\lambda(A-2I)$, $AA^{-1}=\lambda A(A-2I)$, $I=\lambda(-I)$ y por tanto $\lambda=-1$.

Problema2. Las rectas en paramétricas son $r\equiv\begin{cases}x=3-t\\y=t\\z=11-4t\end{cases}$ y $s\equiv\begin{cases}x=-5+s\\y=s\\z=4\end{cases}$

a) Los vectores dirección no son proporcionales, luego se cortan o se cruzan. Si resolvemos el sistema: $\begin{cases}3-t=-5+s\\t=s\\11-4t=4\end{cases}$ vemos que no tiene solución y no hay un punto común a ambas rectas y en consecuencia, se cruzan.

b) El vector que une dos puntos de las rectas debe ser perpendicular a ambas:

$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{u}=(s+t-8,s-t,-7+4t)\cdot(-1,1,-4)=0$, $36-18t=0$, $t=2$

$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}=(s+t-8,s-t,-7+4t)\cdot(1,1,0)=0$, $2s-8=0$, $s=4$

Sustituyendo se obtienen los puntos de corte con la perpendicular común:

$P=(1,2,3)$ y $Q=(-1,4,4)$ y la distancia entre las rectas será $\left|\overrightarrow{PQ}\right|=|(-2,2,1)=3|$.

c) El plano pasará por el punto medio $M=(0,3,7/2)$ y tendrá de vector normal $\vec{n}=(-2,2,1)$ y será $-2(x-0)+2(y-3)+(z-7/2)=0$, $4x-4y-2z+19=0$.

Problema3. a) $L=2y+\pi x$ (siendo y la longitud de un lado vertical). Como la superficie total es $10000=xy+\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2$, despejando se obtiene $y=\frac{40000-\pi x^2}{4x}$. La longitud del perímetro es $L=\frac{40000-\pi x^2}{2x}+\pi x$.

b) Teniendo en cuenta los precios, el coste es $C=\frac{40000-\pi x^2}{2x}+2\pi x$.

c) Derivando $C'(x)=\frac{6\pi x^2-8000}{4x^2}$, e igualando a cero, se obtiene $x=\sqrt{\frac{400}{3\pi}}\approx 20{,}6$. Como $C'(20)<0$ y $C'(21)>0$, corresponde a un mínimo.

<u>OPCIÓN B</u>

Problema1. a) Si en el sistema sustituimos el valor de los parámetros se obtiene el sistema: $\begin{cases}-y+z=6\\ 3x+2y-4z=0\\ -2y+2z=4\end{cases}$. Vemos que la 1ª y 3ª ecuación representan dos planos paralelos y por tanto el sistema es incompatible.

b) Si sustituimos $(x,y,z)=(1,2,3)$, se obtiene el sistema: $\begin{cases}2a+2b-3c=-3\\ a+4b+6c=3\\ 5a+4b+3c=4\end{cases}$.

Utilizando el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix}1&4&6&3\\2&2&-3&-3\\5&4&3&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&6&3\\0&-6&-15&9\\0&-16&-17&-11\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&6&3\\0&-2&-5&-3\\0&-16&-17&-11\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&6&3\\0&-2&-5&-3\\0&0&13&13\end{pmatrix}$$

y la solución es $(a,b,c)=(1,-1,1)$.

c) Si los parámetros son todos nulos, el sistema es homogéneo y tiene la solución $(x,y,z)=(0,0,0)$.

Problema2. a) La recta tiene de ecuación: $(x,y,z)=(0,3,-1)+t(2,-1,1)$.

Por tanto, $d(r,A)=\dfrac{\left|\overrightarrow{PA}x\vec{u}\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\dfrac{\left\|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}\right\|}{\sqrt{6}}=\dfrac{|(-1,2,4)|}{\sqrt{6}}=\sqrt{\dfrac{7}{2}}$.

b) $\cos\alpha=\dfrac{(0,-2,1)\cdot(2,-1,1)}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}}=\dfrac{3}{\sqrt{30}}$ y entonces $\alpha=56{,}8^{\circ}$.

c) Si $z=0$, entonces $t=1$ y el punto de intersección es $Q(2,2,0)$. Como los vectores $\overrightarrow{PA}=(0,-2,1)$ y $\overrightarrow{PA}=(0,-2,1)$ tienen el mismo módulo $\sqrt{5}$, el triángulo es isósceles y por tanto los ángulos en los vértices P y Q son iguales.

Problema3. a) En los gráficos está representada la curva y las rectas tangentes correspondientes.

b) Derivando e igualando a 1, que es la pendiente de la recta perpendicular a $x+y=0$, se obtiene: $y'=-2x=1$, $x=-1/2$, siendo el punto $P(-1/2,15/4)$.

c) Las rectas que pasan por el punto $(-2,1)$ son del tipo $y-1=m(x+2)$. Si han de ser tangentes a la curva el sistema tiene que tener una única solución:

$\begin{cases} y=4-x^2 \\ y=mx+2m+1\end{cases}$. Por igualación, la ecuación $x^2+mx+2m-3=0$ tiene que tener una solución doble: $\Delta=m^2-4(m-3)=0$, $m^2-8m+12=0$, $m=2, m=6$.

Luego las rectas son $\begin{cases} y-1=2(x+2)\rightarrow y=2x+5 \\ y-1=6(x+2)\rightarrow y=6x+13\end{cases}$.