Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones	**Junio de 2009**

Bloque 1: ÁLGEBRA LINEAL

P.1.1. a) Como $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$ tiene inversa. Los adjuntos son: $A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$,

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $A_{21} = -\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -6$, $A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$,

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $A_{31} = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 12$, $A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6$, $A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9$

Y la matriz inversa es: $A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & -6 & 12 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

b) Se tiene que $\left|3A^{-1}\right| = 3\left|A^{-1}\right| = 3 \cdot \frac{1}{9} \cdot 81 = 3 \cdot 9 = 27$ pues la matriz es triangular.

c) Se tiene que $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 36 & 12 \\ 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Le ecuación matricial es:

$x\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 9 & 36 & 12 \\ 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 48 & 12 \\ 0 & 18 & 12 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ que permite obtener el

sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 3y + 9z = 18 \\ 6y + 36z = 48 \\ 12z = 12 \end{cases}$ cuya solución es $x = 3, y = 2, z = 1$.

P.1.2. a) La matriz del sistema para $\alpha = 0$ es: $\begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Calculando los

determinantes: $\begin{vmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$ se tiene que $r(A) = 2, r(B) = 3$ y

el sistema es incompatible.

b) Se calcula el determinante: $\begin{vmatrix} \alpha+3 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -(\alpha+2) \\ 2 & \alpha-3 & -2 \end{vmatrix} = \alpha(\alpha+1)^2$.

Luego si $\alpha \neq 0,-1$ el sistema es compatible y determinado pues $r(A) = (B) = 3$.

c) Para $\alpha = -1$, la matriz del sistema es: $\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ y como todos los determinantes de orden 2 se anulan $r(A) = (B) = 1$ y el sistema es compatible e indeterminado. Tomando una ecuación cualquiera se tiene: $x - 2y - z = 2$, y despejando $x = 2y + z + 2$ se tiene la solución $(2 + 2t + s, t, s)$.

Bloque 2: GEOMETRÍA

P.2.1. a) Puntos de corte con los ejes: $A = (4,0,0)$, $B = (0,1,0)$, $C = (0,0,-2)$.

Los vectores de los lados son: $\overrightarrow{AB} = (-4,1,0)$, $\overrightarrow{AC} = (-4,0,-2)$, $\overrightarrow{BC} = (0,-1,-2)$.

El área del triángulo es $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{matrix}\right\| = \sqrt{21}$.

b) $p = \left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right| + \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{17} + \sqrt{5} + \sqrt{20}$.

c) $\cos\alpha = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \dfrac{16}{\sqrt{340}}, \alpha = 29{,}8^\circ$, $\cos\beta = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|} = \dfrac{1}{\sqrt{85}}, \beta = 83{,}8^\circ$,

$\cos\gamma = \dfrac{\left|\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \dfrac{4}{\sqrt{100}}, \gamma = 66{,}4^\circ$. Se observa que $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

P.2.2. a) La ecuación de la recta es $(x, y, z) = (4,4,t)$ pues su vector dirección es $\vec{n} = (0,0,1)$.

b) El plano tiene de vector normal $\overrightarrow{OQ} = (4,4,t)$ y por tanto su ecuación general es: $4x + 4y + tz + D = 0$. Si pasa por *P* se cumple $0 + 0 + 12t + D = 0$ y si pasa por *Q* se cumple $16 + 16 + t^2 + D = 0$.

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtienen dos valores de *t* y *D*:

$t = 4, D = -48$ y el plano es $x + y + z`-12 = 0$

$t = 8, D = -96$ y el plano es $x + y + 2z - 24 = 0$

Bloque 3: ANÁLISIS

P.3.1. a) $D = \Re - \{-3,3\}$ que son los valores que anulan el denominador.

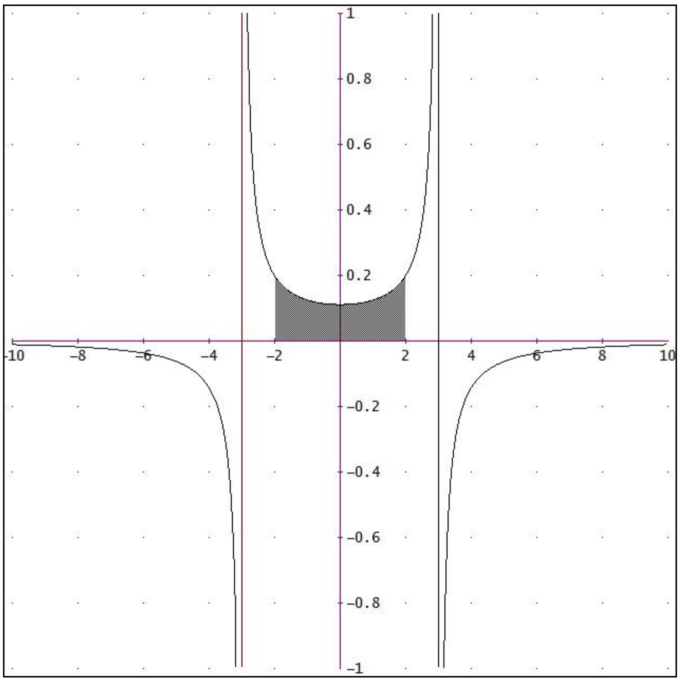
$y' = \dfrac{2x}{(9-x^2)^2}$ se anula en $D = \Re - \{-3,3\}$. Por tanto los intervalos son:

Decrecimiento en $(-\infty,-3) \cup (-3,0)$ y crecimiento en $(0,3) \cup (3,\infty)$.

b) Si $\dfrac{1}{(3-x)(3+x)} = \dfrac{A}{3-x} + \dfrac{B}{3+x}$, reduciendo a común denominador se tiene que

$A(3+x) + B(3-x) = 1$ y dando los valores $x = \pm 3$, se obtiene $A = B = \dfrac{1}{6}$.

c) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{9-x^2}dx = 2\int_0^2 \frac{1}{9-x^2}dx = \frac{1}{3}\int_0^2 \left(\frac{1}{3-x} + \frac{1}{3+x}\right)dx = \frac{1}{3}\ln\frac{3+x}{3-x}\bigg|_0^2 \; \frac{1}{3}(\ln 5 - \ln 1) = \frac{\ln 5}{3}$.



P.3.2. a) $f(x) + f(-x) = e^x - e^{-x} + e^{-x} + e^x = 2e^x$.

b) $\displaystyle\int_{-a}^{a} (e^x - e^{-x})dx = e^x + e^{-x}\Big|_{-a}^{a} = e^a + e^{-a} - (e^{-a} + e^a) = 0$.

c) Derivando dos veces: $y' = e^x + e^{-x}$ $y' = e^x + e^{-x}$ e $y'' = e^x - e^{-x}$. Si se iguala a cero y se resuelve: $e^x = \dfrac{1}{e^x}$, $e^{2x} = 1$, luego $x = 0$ y el punto de inflexión es el origen de coordenadas.

Bloque 4: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

P.4.1. El volumen de la bodega es $100 = \frac{4}{3}x^2 y$ y el coste del suelo, techo y paredes es: $C = \frac{4}{3}x^2 y \cdot 225 + \frac{4}{3}x^2 y \cdot 300 + \left(2x^2 y + 2\frac{4}{3}x^2 y\right) \cdot 256$. Sustituyendo la "y" de la ecuación del volumen en la función de coste se obtiene: $C = 700x^2 + \frac{89600}{x}$.

Derivando: $C' = 1400x - \frac{89600}{x^2}$ y se anula en $x = 4$. Como $C'' = 1400 + \frac{179200}{x^3}$ y $C''(4) > 0$ es un mínimo. El coste de la bodega es $C = 33600$ €.

P.4.2. El precio de venta es $300 \cdot 1{,}4 = 420$ €. Si cada 3 € de rebaja vende 5 unidades más, el beneficio es $B = (420 - 3x)(50 + 5x) = -15x^2 + 1950x + 21000$. Derivando se obtiene: $B' = -30x + 1950$, que se anula en $x = 65$. Como $B''(65) = -30 < 0$, entonces el beneficio máximo se obtiene vendiendo 375 unidades a un precio de 225 €.