

Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones del ejercicio A	Septiembre de 2007

**Bloque 1: ÁLGEBRA LINEAL**

P.1.1. a) El determinante:  $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -50 \neq 0$  y por tanto  $r(A)=r(B)=3$  y el sistema

es siempre compatible y determinado independientemente del parámetro.

b) Resolviendo por Cramer se tiene:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ \alpha & 3 & 2 \end{vmatrix} = 10\alpha - 50, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & \alpha & 2 \end{vmatrix} = 30 - 30\alpha, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & \alpha \end{vmatrix} = 15\alpha - 20$$

$$\text{Por tanto } x = \frac{10\alpha - 50}{-50} = \frac{5 - \alpha}{5}, \quad y = \frac{30 - 30\alpha}{-50} = \frac{3\alpha - 3}{5}, \quad z = \frac{15\alpha - 20}{-50} = \frac{4 - 3\alpha}{10}.$$

$$\text{c) } \frac{5 - \alpha}{5} + \frac{3 - 3\alpha}{5} + \frac{4 - 3\alpha}{10} = 1, \text{ lo que significa } \alpha = 2$$

P.1.2. a)  $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} 6x + 4y = \alpha x \\ -x + y = \alpha y \end{cases}, \quad \begin{cases} (6 - \alpha)x + 4y = 0 \\ -x + (1 - \alpha)y = 0 \end{cases}$ . Para que el sis-

tema tenga una única solución el determinante del sistema no ha de ser nulo:

$$\begin{vmatrix} 6 - \alpha & 4 \\ -1 & 1 - \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 7\alpha + 10 = (\alpha - 2)(\alpha - 5). \text{ Si } \alpha \neq 2 \text{ ó } \alpha \neq 5 \text{ el sistema homogé-}$$

neo tiene como única solución (0,0).

$$\text{b) } \begin{cases} 4x + 4y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}, \text{ es un sistema compatible indeterminado con soluciones } (x, x).$$

**Bloque 2: GEOMETRÍA**

$$\text{P.2.1. a) } d(Q, \pi) = \frac{|2 \cdot 2 + 1 + 3 \cdot 3 - 1|}{\sqrt{4 + 1 + 9}} = \frac{13}{\sqrt{14}}.$$

b)  $P_1(1/2, 0, 0)$ ,  $P_2(0, 1, 0)$ ,  $P_3(0, 0, 1/3)$  son los puntos de corte con los ejes. Los vectores  $\overrightarrow{P_1P_2} = (-1/2, 1, 0)$  y  $\overrightarrow{P_1P_3} = (-1/2, 0, 1/3)$  caracterizan el triángulo.

$$\text{El área del triángulo es } \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/3 \end{vmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{14}}{12}.$$

c) El volumen del tetraedro es  $\frac{1}{6} [\vec{P_1P_2}, \vec{P_1P_3}, \vec{P_1Q}] = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & & 1/3 \\ 3/2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{13}{66}$ .

**P.2.2.** a)  $\cos \alpha = \frac{|n \cdot n'|}{|n| \cdot |n'|} = \frac{|(1,2,1) \cdot (2,1,-1)|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{2}$  y entonces  $\alpha = 60^\circ$ .

b)  $\begin{cases} x+2y=3-t \\ 2x+y=6+t \end{cases}$  y resolviendo el sistema indeterminado  $\begin{cases} x=3+t \\ y=-t \\ z=t \end{cases}$

c)  $\frac{|x+2y+z+3|}{\sqrt{6}} = \frac{|2x+y-z-6|}{\sqrt{6}}$ , que da origen a dos planos bisectores,

$\begin{cases} x-y-2z-9=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}$  que siempre son ortogonales.

### **Bloque 3: ANÁLISIS**

**P.3.1.** a)  $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{4x^2+2x+10}{(x+1)(x^2+5)}$  tiene una asíntota vertical:  $x=-1$ , que es donde

no está definida y una asíntota horizontal:  $y=0$ . Pues  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ .

b)  $H(x) = \int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int \frac{Ax+B}{x^2+5} dx + \int \frac{C}{x+1} dx = \int \frac{2}{x^2+5} dx + \int \frac{2}{x+1} dx$  consecuencia de

obtener mediante  $4x^2+2x+10 = (Ax+B)(x+1) + C(x^2+5)$  los coeficientes. Por

tanto  $H(x) = \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + 2\ln|x+1| + C$ . Si  $H(0) = \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}0 + 2\ln1 + C = 0$ ,

resulta que la primitiva pedida es  $H(x) = \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + 2\ln|x+1|$ .

**P.3.2.** a)  $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$ ,  $f'(2) = -1$  y  $P(2,2)$ . Por tanto la ecuación de la recta tan-

gente es  $y-2 = -1(x-2)$ , es decir  $y = -x+4$ . La ecuación de la recta normal es

$y-2 = 1(x-2)$ , es decir  $y = x$ .

b) Las rectas tangentes, para un punto genérico  $P(x_0, y_0)$ , tienen de ecuación

$y - y_0 = -\frac{4}{x_0^2}(x - x_0)$ . Como las tangentes deben pasar por el punto  $P(4, -8)$ , se

debe cumplir la ecuación  $-8 - y_0 = -\frac{4}{x_0^2}(4 - x_0)$ . Además, se cumplirá la ecuación

$y_0 = \frac{4}{x_0}$ . Resolviendo el sistema se obtienen los puntos  $M(-1,4)$  y  $N(-2,2)$ .

#### **Bloque 4: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**

**P.4.1.** Calculando el límite del cociente de las dos sucesiones:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + n^4 \sqrt{n^3}}{n^2 - 2n + 10} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n^{7/4} + 2}{n^2 - 2n + 10} = 0, \text{ debido a los exponentes de las potencias de}$$

mayor grado. En consecuencia, cuando  $n$  es grande, A procesa los datos con menos operaciones que B.

**P 4.2.** a) El punto más próximo es el origen de coordenadas. Cualquier otro punto del segmento está más alejado por ser la hipotenusa de un triángulo rectángulo frente a un cateto. En este caso la distancia es  $d = 2$ .

b) La distancia entre el surtidor  $P(0,2)$  y un punto de la parábola  $Q(x,4-x^2)$  es

$d(x) = \sqrt{x^2 + (2 - x^2)^2}$ . Los valores que hacen mínima  $d(x)$  serán los mismos que hacen mínimo  $d(x)^2$ . Derivando esta función e igualando a cero:

$4x^3 - 6x = 0$ , se obtienen las soluciones:  $x = -\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, 0$ . Sustituyendo estos valores

en la función se obtiene el mínimo en  $x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$  y  $\frac{\sqrt{6}}{2}$  con valor  $d = \frac{\sqrt{7}}{2}$ .

c) Aunque debemos considerar también el tramo rectilíneo, la distancia mínima está en los dos puntos de la parábola obtenidos antes.

