

Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones	Junio de 2007

Bloque 1: ÁLGEBRA LINEAL

P.1.1. a) $|3 \cdot B(x)| = 3|B(x)| = 3 \begin{vmatrix} x+2 & 4 & 6 \\ 2x+3 & 3 & 6 \\ 4x+4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 162$. Por Sarrus $18x = 162$ y $x = 9$.

b) Como $|C(y)| = \begin{vmatrix} 3y+5 & 7 & 12 \\ 2y+3 & 3 & 6 \\ 3y+4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$ para cualquier valor de y no tiene inversa.

P.1.2. a) La matriz del sistema es: $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \\ \alpha & 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$.

Como $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\alpha-1)(\alpha-7)$ se tiene: $\begin{cases} \alpha \neq 1 \text{ y } \alpha \neq 7 & r(A) = r(B) = 3 \text{ SCD} \\ \alpha = 1 & r(A) = r(B) = 2 \text{ SCI} \\ \alpha = 7 & r(A) = r(B) = 2 \text{ SCI} \end{cases}$

b) Por Gauss: $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \\ 7 & 1 & 1 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 9 \\ 0 & -16 & -2 & -18 \\ 0 & -48 & -6 & -54 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 9 \\ 0 & -16 & -2 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

se obtiene: $x = \lambda$, $y = \lambda$, $z = 8 - 8\lambda$.

Bloque 2: GEOMETRÍA

P.2.1. a) Las rectas en paramétricas: $r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = \frac{1}{2} - 3t \\ z = \frac{3}{2} + 3t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 3 - 2s \\ y = -\frac{3}{2} + s \\ z = 1 + 4s \end{cases}$. Resolviendo el

sistema: $\begin{cases} 1 + 2t = 3 - 2s \\ \frac{1}{2} - 3t = -\frac{3}{2} + s \end{cases}$ se obtiene $t = \frac{1}{2}$ y $s = \frac{1}{2}$ y por tanto $P(2, -1, 3)$.

b) Los vectores son $\vec{u} = (2, -3, 3)$ y $\vec{v} = (-2, 1, 4)$. Por tanto, para calcular el ángulo

que forman las rectas: $\cos \alpha = \frac{|(2, -3, 3) \cdot (-2, 1, 4)|}{\sqrt{22} \cdot \sqrt{21}} = \frac{5}{\sqrt{462}}$ y $\alpha \approx 75'55''$.

$$c) \begin{vmatrix} x-1 & y-\frac{1}{2} & z-\frac{3}{2} \\ 2 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \text{ y la ecuación del plano es } -15x - 14y - 4z + 28 = 0.$$

P.2.2. a) Si $A(-2,0,1)$ es un punto de la recta r , $\vec{u} = (3,-2,4)$ y $Q(3,-1,4)$ el punto

$$\text{exterior, } d(Q,r) = \frac{|\overrightarrow{AQ} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}}{|(3,-2,4)|} = \frac{|(2,-11,-7)|}{|(3,-2,4)|} = \frac{\sqrt{174}}{\sqrt{29}} = \sqrt{6}.$$

b) Porque los vectores $\vec{u} = (3,-2,4)$, $\vec{v} = (1,-1,1)$ y $\overrightarrow{AQ} = (5,-1,3)$ son linealmente

$$\text{independientes: } \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$c) d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AQ}]}|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{|-10|}{|(2,1-1)|} = \frac{10}{\sqrt{6}}.$$

Bloque 3: ANÁLISIS

P.3.1. a) Asíntota oblicua: $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x) \cdot x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^3 - 7x^2 + 2x} = 2.$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 5x - 5}{6x^2 - 7x + 2} = 1. \text{ La ecuación es } y = 2x + 1.$$

Como $6x^2 - 7x + 2 = 6\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$, las asíntotas verticales son $x = \frac{1}{2}$ y $x = \frac{2}{3}$.

$$b) H(x) = \int \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} dx = \int (2x + 1) dx + \int \frac{12x - 7}{6(x - 1/2)(x - 3/2)} dx.$$

Aplicando descomposición fracciones: $\frac{A}{x-1/2} + \frac{B}{x-3/2} = \frac{12x-7}{(x-1/2)(x-3/2)}$ se ob-

tienen los valores $A = B = 6$.

$$H(x) = x^2 + x + \frac{1}{6} \left(\int \frac{6}{x-1/2} dx + \int \frac{6}{x-3/2} dx \right) = x^2 + x + \ln|x-2/3| + \ln|x-1/2| + C.$$

$$H(1) = 2 + \ln(1/3) + \ln(1/2) + C = 1. \text{ Y por tanto } C = -1 + \ln 3 + \ln 2 = \ln 6 - 1.$$

P.3.2. a) Si $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ se tiene que $y' = 3x^2 + 2ax + b$. Se debe cumplir:

$$\begin{cases} y'(2) = 12 + 4a + b = 0 \\ y'(4) = 48 + 8a + b = 0 \end{cases}. \text{ Resolviendo el sistema: } y = x^3 - 9x^2 + 24x + c.$$

b) En el punto de inflexión la derivada 2ª se anula: $y'' = 6x - 18 = 0$. Luego se presenta en $x = 3$. Como además ha de ser un punto del eje OX: $y(3) = 18 + c = 0$.

Luego la función será: $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 18$.

Bloque 3: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

P.4.1. $y = 100x + 250 \frac{40-5x}{10-x}$. Derivando: $y' = 100 - \frac{2500}{(10-x)^2}$ e igualando a cero:

$(10-x)^2 = 25$ tiene de soluciones $x = 15$ (no válida) por superar la producción máxima y $x = 5$. Derivando de nuevo y sustituyendo el valor obtenido:

$$y'' = \frac{5000}{(10-x)^3}, \quad y''(5) < 0 \text{ que corresponde a un máximo.}$$

P.4.2. $A = 2x \cdot y = 2x(12 - x^2) = 24x - 2x^3$. Derivando e igualando a cero: $y' = 24 - 6x^2 = 0$, se tiene $x = 2$. Volviendo a derivar: $y'' = -12x$ y como $y''(2) < 0$ corresponde a un máximo Por tanto el cartel medirá 4x8.

