

Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones del ejercicio A	Septiembre de 2006

Problema 1. a) El determinante:
$$\begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 & 1 \\ 3 & \lambda+6 & -3 \\ 5 & 5 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda = \lambda(\lambda+3)^2$$

Por tanto la solución $(0,0,0)$ se verifica si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq -3$.

b) Si $\lambda = 0$, el sistema resulta ser:
$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 3x + 6y - 3z = 0 \\ 5x + 5y - 2z = 0 \end{cases}$$
 Resolviendo por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & -3 & 0 \\ 5 & 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & -3 & 0 \\ 5 & 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & 3 & 0 \\ 0 & 15 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se obtiene como solución $(x, -3x, -5x)$.

Si $\lambda = -3$,
$$\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 3x + 3y - 3z = 0 \\ 5x + 5y + z = 0 \end{cases}$$
 Y por Gauss:
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Se obtiene como solución $(-y, y, 0)$.

c) Si $\lambda = -3$ se obtienen los dos planos coincidentes y el tercero corta a esos dos en una recta que pasa por el origen de coordenadas.

Problema 2. a) Resolviendo el sistema
$$\begin{cases} 2x - 2y - z = 9 \\ 4x - y + z = 42 \end{cases}$$
 se obtienen las ecuaciones paramétricas de la recta $r: \left(\frac{25-t}{2}, 8-t, t\right)$. Como un vector director de la recta

es $(1, -4, 1)$ sus ecuaciones paramétricas son: $(1+s, 3-4s, -4+s)$.

b) Como los vectores de las rectas no son proporcionales las rectas se cruzan o se

cortan. Como el sistema
$$\begin{cases} 12,5 - 0,5t = 1 + s \\ 8 - t = 3 - 4s \\ t = -4 + s \end{cases}$$
 es incompatible las rectas se cruzan.

c)
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = (2, 1, 2)$$
 es un vector dirección de la perpendicular común. El vector

que une dos puntos genéricos de las rectas debe ser paralelo a este vector:

$$\frac{1+s-(12,5-0,5t)}{2} = \frac{3-4s-(8-t)}{1} = \frac{-4+s-t}{2}. \text{ Este sistema da como soluciones:}$$

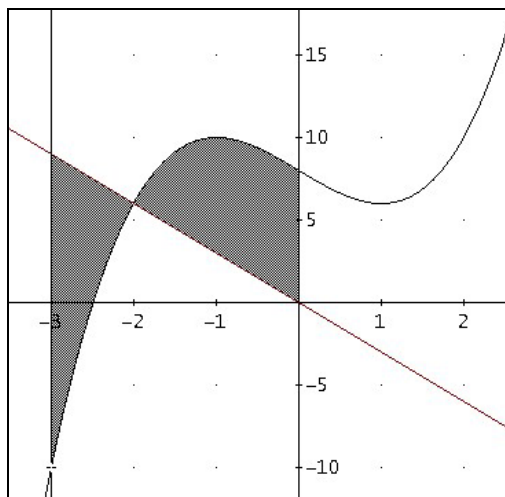
$s=1$ y $t=5$. Sustituyendo el valor de s en la recta correspondiente se obtiene el punto $P(2,-1,-3)$.

Problema 3. a) $f'(x) = 3x^2 - 3$ que se anula en $x = 3$ y $x = -3$. Por tanto el posible máximo absoluto estará en: $f(-3) = -10$, $f(0) = 8$, $f(-1) = 10$. Luego el máximo absoluto se alcanza en el punto $(-1,10)$.

b) Resolviendo la ecuación: $x^3 - 3x + 8 = -3x$, se obtiene el punto de corte $(-2,6)$.

$$c) \int_{-3}^2 [-3x - (x^3 - 3x + 8)] dx + \int_{-2}^0 [x^3 - 3x + 8 - (-3x)] dx = \int_{-3}^2 (-x^3 + 8) dx + \int_{-2}^0 (x^3 - 8) dx$$

$$\text{Y se obtiene aplicando la regla de Barrow: } -\frac{x^4}{4} + 8x \Big|_{-3}^2 + \frac{x^4}{4} \Big|_{-2}^0 = \frac{33}{4} + 12 = \frac{81}{4}.$$



Problema 4. a) Como $r = 1,8t$, la superficie quemada, en función del tiempo, es:

$$S = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (1,8t)^2 = 3,24 \cdot \pi \cdot t^2.$$

b) La velocidad de crecimiento es: $v = S' = 6,48 \cdot \pi \cdot t$. El radio es de 45 m en el instante

$t = \frac{45}{1,8} = 25 \text{ min}$. Entonces la velocidad de crecimiento del área quemada en

ese instante es: $v(25) = 6,48 \cdot \pi \cdot 25 \approx 509 \text{ m}^2/\text{min}$.

Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones del ejercicio B	Septiembre de 2006

Problema 1. a) $|A^3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -1$. Calculando los adjuntos correspondien-

tes se obtiene: $(A^3)^{-1} = -\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -6 & -7 & -4 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Si $XA^3 = BA^2$, entonces $X = BA^2(A^3)^{-1}$ y sustituyendo las diferentes matrices

se obtiene: $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

c) $A^2A = A^3$, multiplicando por la inversa A : $A^2AA^{-1} = A^3A^{-1}$ y $A^2I = A^2 = A^3A^{-1}$.
Multiplicando por la inversa de A^3 : $(A^3)^{-1}A^2 = (A^3)^{-1}A^3A^{-1} = A^{-1}$.

Sustituyendo se obtiene: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Problema 2. a) El plano que tiene como vectores dirección $(-2,2,1)$ y $(2,1,2)$ es

$\begin{vmatrix} x-11 & y-1 & z-2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3x+6y-6z-27=0$ y simplificando: $x+2y-2z-9=0$.

La recta, resolviendo el sistema $\begin{cases} x+y+z=15 \\ 2x-7y+2z=3 \end{cases}$ es en paramétricas: $(15-t,3,t)$.

b) El punto de intersección se obtiene sustituyendo un punto genérico de la recta en la ecuación del plano: $15-t+2\cdot 3-2t-9=0$. Como $t=4$, el punto es el $(11,3,4)$.

El ángulo α se obtiene $\text{sen}\alpha = \frac{|(1,2,-2)\cdot(-1,0,1)|}{3\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y corresponde a 45° .

c) $d(P,\pi) = \frac{|15-t+6-27-9|}{3} = \frac{|12-3t|}{3} = 3$. Resolviendo la ecuación, se obtienen

los puntos: $t=1 \rightarrow M(14,3,1)$ y $t=7 \rightarrow N(8,3,7)$.

Problema 3. a) $y' = a + \cos x$. Si pasa por el origen: $0 = a + b + \text{sen}0$ y $b=0$. Si la recta tangente en el origen es horizontal: $y'(0) = a + \cos 0 = 0$ y $a=-1$.

- b) $g(0) = 0$, $g(\pi) = -2 < 0$ y $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}-1}{2} > 0$. Como la función es continua en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ y cambia de signo en los extremos del intervalo, hay un punto del interior del intervalo en que se anula. Por tanto hay dos puntos en el intervalo $[0, \pi]$ que se anula.
- c) Los puntos son $(0,0)$ y $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ pues $g(0) = 0$ y $g\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 0$.

Problema 4. a) si la distancia al poste más bajo es x , la distancia al poste más alto es $5-x$ y la función de la longitud total es $f(x) = \sqrt{9+x^2} + \sqrt{16+(5-x)^2}$.

- b) Derivando e igualando a cero: $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{9+x^2}} - \frac{2(5-x)}{2\sqrt{16+(5-x)^2}} = 0$ que sim-

plificando da la ecuación $7x^2 + 90x - 225 = 0$ cuya solución válida es $x = \frac{15}{7}$. Enton-

ces la otra distancia es $5-x = \frac{20}{7}$. Se comprueba que las pendientes son iguales,

en valor absoluto: $m_1 = \frac{3}{15/7} = \frac{7}{5}$ y $m_2 = \frac{4}{20/7} = \frac{7}{5}$.

La longitud mínima es: $f(15/7) = \sqrt{9+(15/7)^2} + \sqrt{16+(20/7)^2} \approx 8,6 \text{ m}$.