

Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones del ejercicio A	Junio de 2005

Problema 1. Resolviendo el sistema por reducción se obtiene:

$$\begin{cases} 2AX - 3AY = B \\ AX - AY = C \end{cases} \rightarrow \begin{cases} AX = 3C - B \\ AY = 2C - B \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = A^{-1}(3C - B) \\ Y = A^{-1}(2C - B) \end{cases} \text{ y además } A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \left[3 \begin{pmatrix} -17 & -30 \\ 10 & 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \left[2 \begin{pmatrix} -17 & -30 \\ 10 & 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Problema 2. a) Sustituyendo las ecuaciones de la recta u en el plano:

$$y + y - 12m = 0, \text{ se obtiene el punto } A(1,6m,6m).$$

De manera análoga se obtienen los puntos: $B(2,8m,4m)$ y $C(3,9m,3m)$.

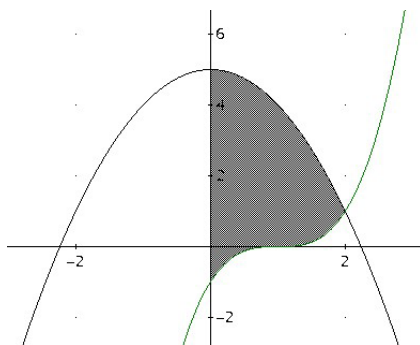
b) Como $\overrightarrow{AB} = (1,2m,-2m)$ y $\overrightarrow{AC} = (2,3m,-3m)$, el área del triángulo será:

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2m & -2m \\ 2 & 3m & -3m \end{vmatrix} = 1. \text{ Por tanto. } |(0,-m,-m)| = 2, \sqrt{2m^2} = 2, m = \pm\sqrt{2}.$$

Problema 3. Se resuelve el sistema $\begin{cases} y = (x-1)^3 \\ y = 5-x^2 \end{cases}$ para hallar el punto de corte de

las curvas: $x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = (x-2)(x^2 + 3)$.

Se calcula la integral definida: $\int_0^2 [5 - x^2 - (x-1)^3] dx = 5x - \frac{x^2}{3} - \frac{(x-1)^3}{4} \Big|_0^2 = \frac{22}{3}$



Problema 4. En la figura, que es una sección del cono inscrito en la esfera, se observa que: $H = x + R$ y $R^2 = x^2 + r^2$, siendo H la altura del cono, r el radio de la base y R el radio de la esfera. Por tanto, el volumen del cono será:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{1}{3}\pi(R^2 - x^2)(x + R) = \frac{1}{3}\pi(R^2 x + R^3 - x^3 - Rx^2).$$

Igualando la derivada a cero: $V' = \frac{1}{2}\pi(R^2 - 3x^2 - 2xR) = 0$, se obtienen los valores: $x = R/3$ y $x = -R$. Calculando la derivada segunda y sustituyendo el valor

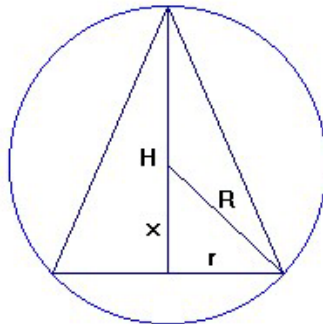
$x = R/3$, se obtiene: $V''(x) = \frac{1}{3}\pi(-6x - 2R)$ y $V''(R/3) < 0$ y por tanto es el valor con el que se obtiene el volumen máximo.

Sustituyendo ese valor se obtiene: $H = \frac{4}{3}R$, $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$ y el volumen del cono se-

rá: $V = \frac{32}{81}\pi R^3$. Si dividimos este volumen entre el de la esfera $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ se obtie-

ne que $\frac{V_{cono}}{V_{esfera}} = \frac{8}{27} < \frac{3}{10}$ y por tanto nunca alcanza el 30% del volumen de la esfe-

ra.



Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones del ejercicio B	Junio de 2005

Problema 1. Resolvemos el sistema por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha - \alpha^2 & \alpha - 1 \\ 0 & \alpha^2 - \alpha & 0 & \alpha^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Si $\alpha = 0$ el sistema es incompatible.

Si $\alpha = 1$ el sistema es compatible e indeterminado y la solución es $(1 - y - z, y, z)$.

Si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1$ el sistema es compatible y determinado y la solución es:

$$y = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 - \alpha} = \frac{\alpha + 1}{\alpha}, \quad z = \frac{\alpha - 1}{\alpha - \alpha^2} = -\frac{1}{\alpha}, \quad x = 1 - \alpha y - \alpha^2 z = 1 - \alpha \frac{\alpha + 1}{\alpha} + \alpha^2 \frac{1}{\alpha} = 0$$

Problema 2. Las proyecciones sobre el plano al ser puntos de la recta son del tipo $P(t, 4, 1)$; pero como son proyecciones ortogonales, el vector que une el origen con P es un vector normal del plano $\vec{n}(t, 4, 1)$.

Las ecuaciones de los planos pedidos serán de la forma $tx + 4y + z + D = 0$ y como el punto $Q(-7, 2, -3)$ pertenece al plano, se cumple: $-7t + 4 \cdot 2 - 3 + D = 0$ y $D = 7t - 5$ y por tanto, los planos pedidos serán del tipo: $tx + 4y + z + 7t - 5 = 0$.

Como el punto Q está en el plano, el vector \overrightarrow{PQ} será ortogonal al vector \overrightarrow{PO} y por tanto $(t + 7, 2, 4) \cdot (t, 4, 1) = 0$. Se obtiene la ecuación $t^2 + 7t + 12 = 0$, cuyas soluciones $t = -3$ y $t = -4$ dan los planos: $-3x + 4y + z - 26 = 0$ y $-4x + 4y + z - 33 = 0$.

Problema 3. La función tiene que ser continua en $x = 0$. Para ello calculamos los límites laterales aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x + a) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln x}{x} + a \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1/x}{-1/x^2} + a \right) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sin \pi x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\pi \cos \pi x}{1} \right) = \pi$$

Para que la función sea continua tiene que tener límite y coincidir con el valor de la función en dicho punto: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$ y $a = b = \pi$.

Problema 4. La función $C(t) = t(0,2948 + 0,04253t - 0,00035t^2)$ se anula en $t = -6,58$, en $t = 0$ y en $t = 128,1$. Por tanto el período de tiempo en que actúa es aproximadamente durante 128 minutos.

Como $C'(t) = 0,29483 + 0,08506t - 0,00105t^2$ se anula en $t = -3,33$ y $t = 84,34$ son los posibles mínimo y máximo de la función.

Además $C''(t) = 0,08506 - 0,021t$, y $C''(84,34) < 0$ y por tanto el máximo de concentración se produce a los 84,34 minutos.

Los valores negativos obtenidos de t no tienen sentido al ser un problema que describe una situación real.