

Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones del ejercicio A	Septiembre de 2004

Problema 1. Si $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ se obtienen las ecuaciones siguientes:

$$\text{tes: } \begin{cases} x+2z = x+3y \\ y+2t = 2x+4y \\ 3x+4z = z+3t \\ 3y+4t = 2z+4t \end{cases} \text{ que se reducen al } \begin{cases} x+z-t = 0 \\ 2x+3y-2t = 0 \\ 3y-2z = 0 \end{cases} \text{ y al resolverlo por Gauss:}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ se obtiene como}$$

solución todas las matrices del tipo $\begin{pmatrix} t-z & 2z/3 \\ z & t \end{pmatrix}$.

Problema 2. a) Como el vector dirección de la recta es el vector normal del plano se verifica: $x-2y+z+D=0$ y sustituyendo el punto $P(-2,4,-3)$ en la ecuación se obtiene $D=13$ y por tanto el plano $x-2y+z+13=0$.

b) Si $P(-2,4,-3)$, $Q(1,2,0)$ y $\vec{u} = (1,-2,1)$ se obtiene la distancia del punto a la recta

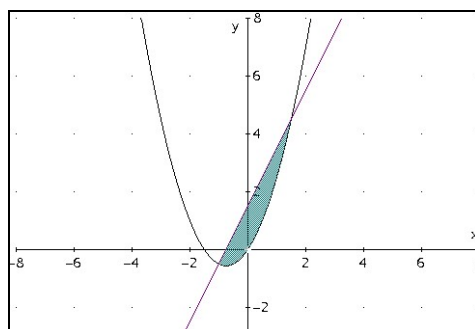
$$d(P,r) = \frac{|\vec{u} \times \overline{PQ}|}{|\vec{u}|} = \frac{\left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{matrix} \right\|}{|(1,-2,1)|} = \frac{|(-4,0,4)|}{\sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Problema 3. a) Si $y=x^2+mx$, su derivada es $y'=2x+m$. Entonces si $y'(-3/4)=0$ se obtiene $m=3/2$. Y como la derivada segunda $y''(-3/4)=2>0$, tendrá un mínimo.

b)

Como $f(x) = x^2 + \frac{3}{2}x$ y su derivada es $f'(x) = 2x + \frac{3}{2}$ se trata de calcular el área

limitada por ambas funciones.



Para ello se calcula a integral definida:

$$\int_{-1}^{3/2} \left[2x + \frac{3}{2} - \left(x^2 + \frac{3}{2}x \right) \right] dx = \int_{-1}^{3/2} \left(-x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right) dx = \frac{125}{48}.$$

Los límites de integración son las soluciones del sistema
$$\begin{cases} y = x^2 + \frac{3}{2}x \\ y = 2x + \frac{3}{2} \end{cases}$$

Problema 4. a) la función que da el número de bacterias en función del tiempo es

$P = 10 \cdot 2^t$ y por tanto al cabo de 10 días, $P(10) = 10 \cdot 2^{10} = 10.240$ bacterias.

b) Como la derivada es constante en el intervalo $0 \leq t \leq 10$, se trata de una función lineal $P = at + b$ en ese intervalo.

Resolviendo el sistema $\begin{cases} P(0) = a \cdot 0 + b = 500 \\ P(3) = a \cdot 3 + b = 1100 \end{cases}$ se obtiene la función $P(t) = 200t + 500$ y

por tanto, al cabo de 10 días, $P(10) = 2500$ bacterias.

Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones del ejercicio B	Septiembre de 2004

Problema 1. a) Calculamos la matriz inversa mediante determinantes:

$$|A| = -8 \neq 0, |A_{11}| = 6, |A_{12}| = 6, |A_{13}| = 2, |A_{21}| = -2, |A_{22}| = -2, |A_{23}| = -2,$$

$$|A_{31}| = 4, |A_{32}| = 12, |A_{33}| = 8. \text{ Por tanto la matriz inversa es } A^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 6 & -2 & 12 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } B = A(A+4I) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

c) Como $A(A+4I) = -4I$ se puede expresar de la forma $A \cdot \left(-\frac{1}{4}(A+4I) \right) = I$ y por

tanto $A^{-1} = -\frac{1}{4}(A+4I) = -\frac{1}{4}A - I$. Luego $x = -1/4$ e $y = -1$. Además $A^2 + 4A = -4I$ y

entonces $A_2 = -4A - 4I$. Por tanto $z = t = -4$.

Problema 2. a) Como $\overrightarrow{BC} = (0, -1, 1)$ y $\overrightarrow{BD} = (2, 0, 2)$, el área del triángulo será:

$$A = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}| = \frac{1}{2} |(-2, 2, 2)| = \sqrt{3}.$$

b) Como $\overrightarrow{BA} = (1, -1, 0)$, el volumen del tetraedro será:

$$V = \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}] \right| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{2}{3}.$$

c) El vector $(-2, 2, 2)$ obtenido anteriormente es un vector normal del plano así como el $(-1, 1, 1)$. El plano pedido pertenece al haz de planos paralelos $-x+y+z+D=0$. Al pasar por $B(1,0,0)$ se obtiene $D=-1$ y el plano $-x+y+z-1=0$. La distancia será:

$$d = \frac{|-1+0+0-1|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Problema 3. a) Hacemos la descomposición adecuada para obtener dos integrales inmediatas:

$$\int \frac{4x+11}{(x+1)^2+1} dx = \int \frac{4x+4}{(x+1)^2+1} dx + \int \frac{7}{(x+1)^2} dx = 2 \int \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+1} dx + 7 \int \frac{1}{(x+1)^2+1} dx = .$$

$$2 \ln[(x+1)^2+1] + 7 \operatorname{arctg}(x+1).$$

$$b) \int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{4x+11}{(x+1)^2+1} dx = 2\ln 4 + 7\arctg\sqrt{3} - 2\ln 2 - 7\arctg 1 = 2\ln 2 + \frac{7\pi}{12}.$$

Problema 4. Por Pitágoras $y = \sqrt{x^2 + (16-x)^2}$. Derivando la expresión e igualando

a cero: $y' = \frac{2x - 2(16-x)}{2\sqrt{x^2 + (16-x)^2}} = \frac{2x - 16}{\sqrt{x^2 + (16-x)^2}} = 0$ se obtiene $x=8$ y el lado del cua-

drado será $y = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}$. Para comprobar que es un mínimo observamos que en el intervalo $(0,8)$ $y' < 0$ (decreciente) y en el $(8,16)$ $y' > 0$ (creciente).

