Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones del ejercicio A	**Junio de 2004**

Problema 1. a) La matriz B ampliada es: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 2 & -1 & 3\lambda \\ 2 & \lambda & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

El determinante de la matriz de los coeficientes A vale $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \lambda & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & -2 \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda+2)$.

Si λ=3 se tiene $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ y como el rango(A)=rango(B)=2<3 , el sistema es compatible e indeterminado.

Si λ=-2 se tiene $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & -6 \\ 2 & -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ y como el rango(A)=2 y rango(B)=3, el sistema es incompatible.

Si $\lambda \neq 3 \ y \ \lambda \neq -2$ entonces el rango(A)=rango(B)=3 y el sistema es compatible y determinado.

b) Si λ=3 el sistema es $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 3x + 2y - z = 9 \\ 2x + 3y - 2z = 6 \end{cases}$ que da como solución (3-t/5,4t/5,t).

Si Si $\lambda \neq 3 \ y \ \lambda \neq -2$ se resuelve por Cramer:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ 3\lambda & 2 & -1 \\ 6 & \lambda & -2 \end{vmatrix} = 2(\lambda-3)(2\lambda+1) \qquad \Delta y = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda$$

$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ \lambda & 2 & 3\lambda \\ 2 & \lambda & 6 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-3)$ y por tanto la solución es $\left(\dfrac{2(2\lambda+1)}{\lambda+2}, \dfrac{2(\lambda-1)}{\lambda+2}, \lambda-2 \right)$

Problema 2. a) La recta intersección de los planos $\begin{cases} x+y+z=-5 \\ x-3y-z=3 \end{cases}$ en forma vectorial es $(x,y,z)=(-3,-2,0)+t(1,1,-2)$.

Los vectores dirección de ambas rectas: $\vec{u}=(1,1,-2)$ y $\vec{v}=(2,3,2)$ no son proporcionales y por tanto las rectas se cortan o se cruzan.

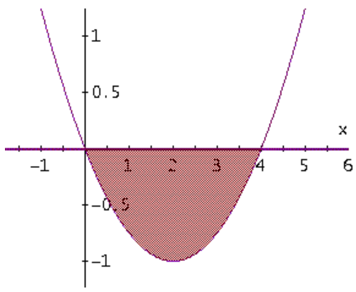
Se busca el punto común de ambas rectas igualando sus ecuaciones vectoriales: (-3,-2,0)+t(1,1,-2)=(2,1,0)+s(2,3,2) se obtiene un sistema sin solución (incompatible). Luego las rectas se cruzan8

b) El vector normal del plano es perpendicular a los vectores dirección de las dos rectas: $\vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}=(-8,6,1)$. El plano pertenece al haz -8x+6y+z+k=0. Como contiene a la recta *s* ha de pasar por el punto P(-3,-2,0) y por tanto el plano pedido será -8x+6y+z-12=0.

Problema 3. La función derivada da la pendiente en cada punto de la curva: $y'=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$. La pendiente será máxima o mínima en los puntos donde se anule la 2ª derivada: $y''=\dfrac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$. Es decir, $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Como en $\left(-\infty,-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ $y''>0$ la función es creciente y en $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ $y''<0$ la función es decreciente, es en $x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ donde presenta el máximo. La pendiente máxima vale: $y'(-\dfrac{1}{\sqrt{3}})=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

Problema 4. Se trata de hacer la integral $\int_0^4\left(\dfrac{x^2}{4}-x\right)dx=\left[\dfrac{x^3}{12}-\dfrac{x}{2}\right]_0^4=-\dfrac{8}{3}$. El valor negativo obtenido es por la situación de la región limitada respecto del eje OX.

Si 1 Km^2= 100 Ha y si vale a 60 €, el pinar costará 16.000 € aproximadamente.



Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones del ejercicio B	**Junio de 2004**

Problema 1. Calculamos $|B| = \begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 1 \end{vmatrix} = x^3 - x^2 + x - 1$. Como

$|2B| = 2^3|B| = 160$ habrá que resolver la ecuación: $x^3 - x^2 + x - 1 = 20$. Factorizando por Ruffini $x^3 - x^2 + x - 21 = (x-3)(x^2 + 2x + 7)$, la solución real es x=3.

Problema 2. a) El plano pertenece al haz $x - 2y - z + k = 0$. Al tener que pasar por P(1,1,1), se obtiene $x - 2y - z + 2 = 0$.

b) El plano tiene de vectores dirección el vector de la recta $\vec{u} = (1,2,3)$ y el vector $\overrightarrow{AP} = (0,1,1)$ siendo A(1,0,0) un punto de la recta.

La ecuación del plano será: $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, es decir $x + y - z - 1 = 0$.

c) Dados los planos $\begin{cases} x - 2y - z + 2 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$ se obtiene la ecuación de la recta $\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$

Problema 3. Se hace la descomposición en fracciones: $\dfrac{-16}{x^2 - 2x - 15} = \dfrac{-2}{x-5} + \dfrac{2}{x+3}$.

Ahora $\int_0^z \left[\dfrac{-2}{x-5} + \dfrac{2}{x+3}\right] dx = -2\ln\left|\dfrac{z-5}{z+3}\right| + 2\ln\dfrac{5}{3} = \ln 25$. Operando con logaritmos se obtiene $2\cdot\ln\left|\dfrac{z+3}{z-5}\right| = 2\cdot\ln 3$ y por tanto $\left|\dfrac{z+3}{z-5}\right| = 3$ que da origen a dos ecuaciones: $\begin{cases} z + 3 = 3(z-5) \\ z + 3 = -3(z-5) \end{cases}$ y se obtienen las soluciones z=9 y z=3.

Problema 4. Si la distancia a la boya B desde N es $3\sqrt{5}$ entonces la distancia máxima posible a recorrer por la orilla es de 6 km pues $\sqrt{(3\sqrt{5})^2 - 3^2} = 6$.

Si se llama *x* a la distancia que recorre por la orilla, la que realizará nadando es $\sqrt{3^2 + (6-x)^2} = \sqrt{45 - 12x + x^2}$.

El tiempo total empleado será $y = \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{45-12x+x^2}}{3}$. Derivando la función se tiene $y' = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{-12+2x}{\sqrt{45-12x+x^2}}$ e igualando a cero, se obtiene la ecuación $16x^2 - 192x + 495 = 0$ que da las soluciones x=8,25 y x=3,75. La primera no es posible por las condiciones del probelam y la segunda es la correcta pues la función pasa de ser decreciente $y'(3{,}5) = -0{,}0134 < 0$ a ser creciente $y'(4) = 0{,}0154 > 0$.