

Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones del ejercicio A	Septiembre de 2003

Problema 1. a) Si $A = \begin{vmatrix} 0 & m & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -(m+1) \end{vmatrix} = m^2 - 4m + 3 = (m-3)(m-1) = 0$, la matriz

tiene inversa si $m \neq 3 \wedge m \neq 1$. Si calculamos los adjuntos del determinante se ob-

tiene como matriz $A^{-1} = \frac{1}{(m-3)(m-2)} \begin{vmatrix} 1 & m^2 + m + 3 & -m \\ m-4 & -15 & 3 \\ 1 & 5m & -m \end{vmatrix}$.

b) Si $m=0$, $AX = B - AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ y

entonces $X = A^{-1}B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & -15 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ -6 & -4/3 & 1 \\ 0 & 1/3 & -1 \end{pmatrix}$.

Problema 2. a) Si el rectángulo mide x m. de largo por y m. de ancho, como el área es $xy=400$ m², la función coste es: $f(x) = 100(2x + 2y) = 100\left(2x + \frac{800}{x}\right)$.

El dominio es $D = (0, \infty)$. Si suponemos que la menor medida sea 1 m. de longitud, en ese caso el dominio sería $D=[1,400]$.

b) Derivando e igualando a cero, $f' = 100\left(2 - \frac{800}{x^2}\right) = 0$, se obtiene $x=20$ e $y=20$ (cuadrado). La derivada segunda confirma que es un mínimo, $f''(20) = 20 > 0$.

Problema 3 a) Las medias y desviaciones típicas son: $\bar{x} = 5,85, \sigma_x = 1,81$ para la Filosofía y $\bar{y} = 6,57, \sigma_y = 1,50$ para la Literatura.

b) El coeficiente de correlación es: $\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{1,36}{1,81 \cdot 1,50} = 0,50$. Esto indica que no

existe una dependencia estadística entre ambas calificaciones. Por tanto no se puede hacer una estimación de la calificación de una asignatura en función de la nota obtenida en la otra.

c) En este caso la correlación es alta al eliminar la calificación que alteraba la tendencia existente. Ahora si se podría hacer una estimación bastante correcta.

Problema 4. a) La recta expresada en paramétricas es:
$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{cases}$$

Entonces $d(P,r) = \frac{|\overrightarrow{APx\vec{u}}|}{|\vec{u}|} = \frac{|-3\vec{i} - 6\vec{j} + 6\vec{k}|}{3} = 3$, siendo $A=(3,-1,0)$.

b) Si $M=(3-2t,-1+2t,t)$ es un punto genérico de la recta, $\overrightarrow{MP} = (2t, 3-2t, 3-t)$ y la $d(M,P) = \sqrt{9t^2 - 18t + 18} = 3\sqrt{5}$. Resulta la ecuación $t^2 - 2t - 3 = 0$ con soluciones $t=3$ y $t=-1$. Si $t=-1$ se obtiene $M=(5,-3,-1)$ y si $t=3$ el punto $N=(-3,5,3)$.

c) El área del triángulo MNP es: $\frac{1}{2} |\overrightarrow{MPxNP}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 5 & 4 \\ -8 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 18$.

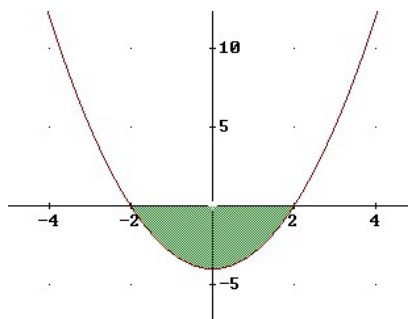
Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones del ejercicio B	Septiembre de 2003

Problema 1. a) $|P| = -1$; $P_{11} = 3$; $P_{12} = -2$; $P_{21} = -2$; $P_{22} = 1$. Por tanto $P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) Si $P^{-1}XP = Q$, se tiene que $X = PQP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

c) $(PQP^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & -10 \\ 30 & -11 \end{pmatrix}$.

Problema 2. a) La superficie está limitada por la parábola y el eje de abscisas:



$$S = \left| \int_{-2}^2 (x^2 - 4) dx \right| = 2 \left| \int_0^2 (x^2 - 4) dx \right| = 2 \left| \frac{x^3}{3} - 4x \right|_0^2 = \frac{32}{3}.$$

b) Para el volumen de revolución alrededor del eje OX se aplica $V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$:

$$V = \pi \int_{-2}^2 (x^2 - 4x)^2 dx = 2\pi \int_0^2 (x^2 - 4x)^2 dx = 2\pi \cdot \left[\frac{x^5}{5} - \frac{8x^3}{3} + 16x \right]_0^2 = \frac{512\pi}{15}.$$

Problema 3. a) Se trata de una distribución $N(68,5; 10)$:

$$p(48 \leq x \leq 71) = p\left(\frac{48 - 68,5}{10} \leq z \leq \frac{71 - 68,5}{10}\right) = p(-2,05 \leq z \leq 0,25) = 0,5785.$$

Por tanto serán $0,5785 \cdot 500 = 289$ estudiantes.

$$b) p(x \geq 91) = p\left(z \geq \frac{91 - 68,5}{10}\right) = p(z \geq 2,25) = 0,122.$$

Por tanto serán $0,122 \cdot 500 = 6$ estudiantes.

c) Ahora es una binomial $B(5, 0,2578)$ pues $p(x \geq 75) = p(z \geq 0,65) = 0,2578$.

$$\text{Por tanto } p(x = 2) = \binom{5}{2} 0,2578^2 \cdot 0,7422^3 = 0,2717.$$

Problema 4. a) Obtenemos las ecuaciones implícitas de los planos:

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y-2 & z-1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0, 2x+2y+z-5=0 \quad \pi': \begin{vmatrix} x-3 & y & z-2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0, y+z-2=0$$

Expresamos la recta en paramétricas, resolviendo el sistema:
$$\begin{cases} x = -\frac{9}{2} + \frac{1}{2}t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$$

b) Los vectores normales de los planos son: $\vec{n} = (2,2,1)$ y $\vec{n}' = (0,1,1)$. Por tanto

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}'|}{|\vec{n}| |\vec{n}'|} = \frac{(2,2,1) \cdot (0,1,1)}{3 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \text{ El ángulo es } \alpha = 45^\circ.$$

c) El plano pedido pertenece al haz de planos: $2x + 2y + z - 5 + \lambda(y + z - 2) = 0$.

Su vector normal ha de ser perpendicular al del plano π : $(2, 2+\lambda, 1+\lambda) \cdot (2, 1, 1) = 0$.

Se obtiene $\lambda = -3$ y sustituyendo en la ecuación del haz se tiene: $2x - y - 2z + 1 = 0$.