

Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones del ejercicio A	Junio de 2003

**Problema 1.** a) La matriz B ampliada es: 
$$\begin{pmatrix} I & 0 & 2 & 0 \\ 0 & I & -1 & I \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

El determinante de la matriz de los coeficientes A vale 
$$\begin{vmatrix} I & 0 & 2 \\ 0 & I & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = I(I+1).$$

Si  $\lambda=0$  se tiene 
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$
 y como  $\text{rango}(A)=\text{rango}(B)=2 < 3$ , el sistema es

compatible e indeterminado.

Si  $\lambda=-1$  se tiene 
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$
 y como  $\text{rango}(A)=2$  y  $\text{rango}(B)=3$ , el sistema

es incompatible.

Si  $I \neq 0$  y  $I \neq -1$  entonces el  $\text{rango}(A)=\text{rango}(B)=3$  y el sistema es compatible y determinado.

b) Si  $\lambda=0$  el sistema es 
$$\begin{cases} 2z = 0 \\ -z = 0 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$$
 que da como solución  $(5-3t, t, 0)$ .

Si  $I \neq 0$  y  $I \neq -1$  se resuelve por Cramer:

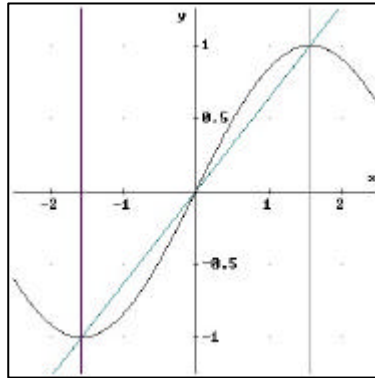
$$\Delta x = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ I & I & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -4I \quad \Delta y = \begin{vmatrix} I & 0 & 2 \\ 0 & I & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = I^2 + 3I \quad \Delta z = \begin{vmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & I \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2I^2 \quad \text{y por}$$

tanto la solución es 
$$\left( \frac{-4}{I+1}, \frac{I+3}{I+1}, \frac{2I}{I+1} \right)$$

**Problema 2.** a) El área será por la simetría, el doble del área encerrada entre la curva y la recta en el intervalo  $[0, \pi/2]$ :

$$A_1 = \int_0^{p/2} \text{sen}x dx = [-\cos x]_0^{p/2} = 1 \quad \text{y} \quad A_2 = \int_0^{p/2} (2/p)x dx = \left[ \frac{x^2}{p} \right]_0^{p/2} = \frac{p}{4}. \quad \text{Por tanto el}$$

$$\text{área pedida es } A = 2(A_1 - A_2) = 2 - \frac{p}{2}.$$



b) Se integra por partes

$$\int x \text{sen}x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \rightarrow u' = 1 \\ v' = \text{sen}x \rightarrow v = -\cos x \end{array} \right\} = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \text{sen}x$$

$$\text{Por tanto el resultado será: } \frac{2}{p} [-x \cos x + \text{sen}x] + k$$

**Problema 3.** Los valores de las medias, desviaciones típicas y covarianza:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x} = 1,69 \\ s_x = 0,11 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \bar{y} = 80,25 \\ s_y = 6,83 \end{array} \right\}, s_{xy} = 0,69.$$

a) Utilizando la recta de regresión de "y sobre x":  $y - 80,25 = \frac{0,69}{0,11^2} (x - 1,69)$  y sus-

tituyendo  $x = 1,72$  se obtiene como peso esperado  $y(1,72) = 81,96$ .

b) Utilizando la recta de regresión de "x sobre y":  $x - 1,69 = \frac{0,69}{6,83^2} (y - 80,25)$  y sus-

tituyendo  $x = 80$  se obtiene como peso esperado  $y(80) = 1,70$ . Al ser muy fuerte la correlación se podía haber utilizado la primera recta de regresión sin cometer un error apreciable.

**Problema 4.** a) Las ecuaciones de las rectas en paramétricas son:

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 + 2l \\ y = 6 + l \\ z = 7 - 2l \end{cases} \quad r' \equiv \begin{cases} x = 4 - m \\ y = 7/2 - m/2 \\ z = m \end{cases}$$

Como sus vectores dirección  $(2, 1, -2)$  y  $(-1, 1/2, 1)$  son proporcionales y el punto  $(3, 6, 7)$  de  $r$  no pertenece a  $r'$ , las rectas son paralelas.

b) Se coge un punto  $P=(3, 3, 1)$  de  $r'$ , y entonces se verifica

$$d(r, r') = d(r, P) = \frac{|\vec{AP} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{|(12, 12, 6)|}{|(2, 1, -2)|} = \frac{12|(2, 2, -1)|}{3} = 6$$

c) El triángulo tiene de base  $|\vec{AB}| = |(4, 2, -4)| = 6$  y altura  $d(r, r')$ ,  $A = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18$ .

Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones del ejercicio B	Junio de 2003

**Problema 1.** a) Resolviendo el sistema de ecuaciones matriciales se obtiene:

$$X = C + 2Y = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad Y = \frac{1}{5}(B - 2C) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$b) (2X + Y)X - (2X + Y)(2Y) = (2X + Y)(X - 2Y) = BC = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Problema 2.** En el triángulo cada lado igual vale  $30 - \frac{x}{2}$ . La altura del triángulo

$$\text{vale } h = \sqrt{\left(30 - \frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{900 - 30x}. \text{ El área será } A(x) = \frac{x\sqrt{900 - 30x}}{2}.$$

$$\text{La función } f(x) = \frac{x^2(900 - 30x)}{4} = 225x^2 - \frac{15}{2}x^3 \text{ con } x \in (0,30).$$

Se busca donde la derivada se anula  $f'(x) = 450x - \frac{45}{2}x^2 = 0$ , es decir en  $\begin{cases} x = 0 \\ x = 20 \end{cases}$

Mediante la derivada segunda,  $f''(x) = 450 - 45x$ , vemos que en  $x=20$  se presenta el máximo al ser  $f''(20) < 0$ .

**Problema 3.** Se trata de una binomial  $B(5, 1/6)$ .

$$a) p(x=2) = \binom{5}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0,16$$

$$b) p(x \leq 1) = p(x=0) + p(x=1) = \binom{5}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^5 + \binom{5}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,40 + 0,40 = 0,80$$

$$c) p(x > 2) = 1 - p(x \leq 2) = 1 - p(x=0) - p(x=1) - p(x=2) = 1 - 0,80 - 0,16 = 0,04$$

**Problema 4.** a) La ecuación de la recta es  $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 \\ z = 4 + t \end{cases}$  y la ecuación del plano es

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ es decir, } x - 2y + 2z - 3 = 0. \text{ Como el producto escalar de los}$$

vectores de la recta y el plano vale  $(1,0,1) \cdot (1,-2,2) = 3 \neq 0$ , la recta y el plano no son paralelos.

b) Sustituyendo la ecuación de la recta en el plano,  $2+t - 2 \cdot 2 + 2(4+t) - 3 = 0$  se obtiene  $t = -1$ , y por tanto el punto de intersección es  $P(1,2,3)$ .

Como  $\text{sen } \alpha = \frac{|(1,-2,2) \cdot (1,0,1)|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{9}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , el ángulo es  $\alpha = 45^\circ$ .

c) Sustituyendo en la fórmula de la distancia de un punto a un plano, las coordenadas genéricas de un punto de la recta, se obtiene  $\frac{|3t+1|}{3} = 4$ , que da origen a las

$$\text{ecuaciones } \begin{cases} 3t+1=12 \\ 3t+1=-12 \end{cases} \text{ de soluciones } \begin{cases} t=3 \rightarrow S=(5,2,7) \\ t=-5 \rightarrow T=(-3,2,-1) \end{cases}.$$