Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones del ejercicio A	**Junio de 2002**

Problema 1. i) El determinante de A es: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 10x - 8y + 2z$ y el determinante de B es: $\begin{vmatrix} 2 & x & 1 \\ 1 & y & -1 \\ 2 & z & -1 \end{vmatrix} = -x - 4y + 3z$.

ii) El determinante valdrá el producto de las expresiones anteriores para *x=y=z=1*, $|A \cdot B| = 4 \cdot (-2) = -8$.

iii) Resolviendo el sistema $\begin{cases} 10x - 8y + 2z = 0 \\ -x - 4y + 3z = 0 \end{cases}$ se obtiene de solución: *(x,2x,3x)* que es indeterminado. Por tanto hay infinitas ternas del tipo *x(1,2,*3) para las que ambas matrices no tienen inversa.

Problema 2. i) la recta tiene de vector dirección $\overline{AB} = (-1,4,-2)$ y su ecuación paramétrica es $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 4t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$.

ii) Se pide el lugar geométrico de los puntos cumplen la igualdad *d(A,X)=d(B,X*) y por tanto: $\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2}$. Simplificando se obtiene el plano mediatriz del segmento que une A con B: *-2x+8y-4z+9=0*.

iii) Calculamos la recta intersección del plano obtenido con el *2y=z*. Para ello resolvemos el sistema indeterminado y obtenemos la recta en paramétricas: $\begin{cases} x = 9/2 \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$.

La distancia es $\frac{|\overline{OA}\ x\ \bar{v}|}{|\bar{v}|} = \frac{\frac{9}{2}\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{9}{2}$. Ya que $\bar{v} = (0,1,2)$ e $|\overline{OA}\ x\ \bar{v}| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 9/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

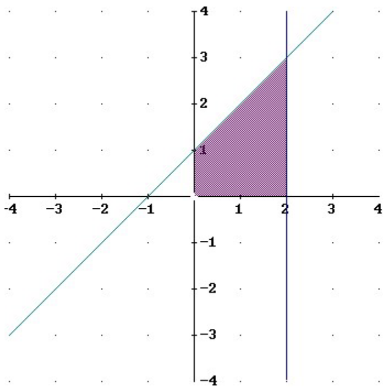
Problema 3.

a) $\begin{cases} \overline{x} = 14{,}43 \\ \sigma_x = 4{,}52 \end{cases}$, $\begin{cases} \overline{y} = 6{,}57 \\ \sigma_y = 2{,}13 \end{cases}$, $\sigma_{xy} = 9{,}27$, $r = \dfrac{9{,}27}{4{,}52 \cdot 2{,}13} = 0{,}96$

b) Indica la correlación entre ambas variables. En este caso al ser próximo a 1 indica que existe una correlación muy fuerte y además positiva, es decir, que a más horas de estudio mejor calificación en Matemáticas.

c) Utilizando la recta de regresión de "y sobre x": $y - 6{,}57 = \dfrac{9{,}27}{4{,}52^2}(x - 14{,}43)$ y sustituyendo *x=20* se obtiene como calificación esperada *y(20)=9,1*.

Problema 4. $\displaystyle\int_0^{a-1} (x+1)dx = \left.\frac{x^2}{2} + x\right|_0^{a-1} = \frac{(a-1)^2}{2} + (a-1) = \frac{9}{2}$ y se obtiene como valor positivo $a = \sqrt{10}$. El área será $\displaystyle\int_0^2 (x+1)dx = \left.\frac{x^2}{2} + x\right|_0^2 = 4$.



Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones del ejercicio B	**Junio de 2002**

Problema 1. i) $|M(\lambda)| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & \lambda \\ 2 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda & -1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2 \neq 0$ para todo $\lambda \in R$ y por tanto siempre tiene matriz inversa.

ii) Como A_{11}=-1, A_{12}=2, A_{13}=0, A_{21}=3, A_{22}=-4, A_{23}=0, A_{31}=6, A_{32}=-8 y A_{33}=-2 y $|M(0)| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2$ se tiene que $M(0)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 2 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

iii) $\left|AB^{-1}C^{-1}\right| = \frac{|A|}{|B|\cdot|C|} = \frac{|M(8)|}{|M(0)|\cdot|M(3)|} = \frac{50}{10\cdot 5} = 1$, pues $\left|A\cdot A^{-1}\right| = |A|\cdot\left|A^{-1}\right| = |I| = 1$.

Problema 2. i) Ponemos la recta $\begin{cases} 2x + y - z + 5 = 0 \\ 4x + 4y - z + 9 = 0 \end{cases}$ en forma paramétrica: $(x, y, z) = (\frac{-11}{4}, \frac{-1}{2}, 0) + t(\frac{3}{4}, \frac{-1}{2}, 1)$ si t=1 se obtiene el punto Q(-2,0,1) y como vector dirección tomamos $\bar{v} = (3,-2,4)$. La distancia de la recta al punto P es

$$d(P,r) = \frac{\left|\overline{PQ}\ x\ \bar{v}\right|}{|\bar{v}|} = \frac{\begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{\sqrt{174}}{\sqrt{29}} = \sqrt{6}$$

ii) Para hallar el plano tomamos el punto P y los vectores $\overline{PQ}\ y\ \bar{v}$:

$$\begin{vmatrix} x+2 & y & z-1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2x - 11y - 7z + 11 = 0.$$

Problema 3. Derivando y simplificando la función $y = arcsen\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}\frac{\sqrt{1+x^2}-x\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}2x}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2}$$. Si derivamos y simplificamos

la función $y = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2}}\frac{-\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}2x}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2}$.

Al obtener la misma derivada ambas funciones se diferencian en una constante.

Problema 4. Se trata de una binomial B(3;0,2).

i) $p(x=3) = \binom{3}{3}0{,}2^3 0{,}8^0 = 0{,}008$

ii) $p(x=0) = \binom{3}{0}0{,}2^0 0{,}8^3 = 0{,}512$

iii) $p(x=1) = \binom{3}{1}0{,}210{,}8^2 = 0{,}384$