Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones del ejercicio A	**Junio de 2001**

Problema 1. Se considera un punto genérico P(x,y,z) a una distancia 6 del plano dado. Aplicando la fórmula de la distancia punto-plano $\frac{|2x+3y-4z-7|}{\sqrt{12^2+3^2+4^2}}=6$, operando y quitando el valor absoluto, se obtienen los planos $\begin{cases} 12x+3y-4z=55 \\ 12x+3y-4z=-41 \end{cases}$

Problema 2. Tipificando y buscando en las tablas se obtiene:

$p(x>112)=p(\frac{x-105}{5}\geq\frac{112-105}{5})=p(z\geq 1{,}4)=0{,}0808$,

$p(x>115)=p(z\geq 2)=0{,}0228$.

Es una probabilidad condicionada: $p(x>115/x>112)=\frac{0{,}0228}{0{,}0808}=0{,}2822$.

Problema 3. La matriz inversa de $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ es $\frac{1}{-8}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$.

Si expresamos el sistema en forma matricial $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix}$, se obtiene

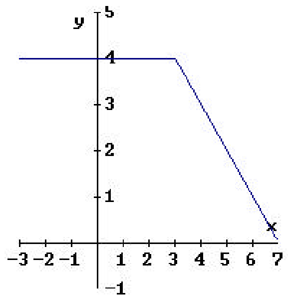
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{1}{-8}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Si $A^2+A=I$, se obtiene $A(A+I)=I$ y por tanto $A^{-1}=A+I$.

Problema 4. El lado del triángulo será $\frac{x}{3}$ y el del cuadrado $\frac{100-x}{4}$. Como el área del triángulo equilátero de lado l es $A=\frac{\sqrt{3}l^2}{4}$, el área de las dos figuras será: $A=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{100-x}{4}\right)^2$. Derivando se obtiene $A'=\left(\frac{\sqrt{3}}{18}+\frac{1}{8}\right)x-\frac{25}{2}$ que se anula en $x_o=\frac{900}{4\sqrt{3}+9}$. El dominio de la función es]0,100[. La derivada es negativa]0,x_o[y es positiva en]x_o,100[y por tanto presenta el área mínima en x_o.

Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones del ejercicio B	**Junio de 2001**

Problema 1. La función presenta en x =3 un punto "anguloso". Si se calcula su función derivada: $f'(x)=\begin{cases} 0 \ si \ -3<x<3 \\ -1 \ si \ 3<x<7 \end{cases}$ y $f_{-}^{'}(3)=0\neq f_{+}^{'}(3)=-1$, es decir es un punto sin derivada, pues las derivadas laterales son diferentes.



Problema 2. Si $A\cdot X+B=C$, se obtiene que $X=A^{-1}(C-B)$. Como $A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -12 & 3 & 0 \\ 8 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ y $C-B=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ se obtiene $X=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -12 & 3 & 0 \\ 8 & -5 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 \\ -9 \\ 17 \end{bmatrix}$.

Problema 3. Se trata de dos binomiales: $B_1(3,\frac{2}{5})$ y $B_2(3,\frac{5}{8})$. Calculamos la probabilidad para cada caso:

$$p(x\geq 1)=1-p(x=0)=1-\binom{3}{0}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^0\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3\approx 0{,}78$$

$$p(x\geq 1)=1-p(x=0)=1-\binom{3}{0}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^0\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^3\approx 0{,}95$$

Es mayor la probabilidad en el segundo caso pues también es mayor la probabilidad de sacar una bola roja de una única urna.

Problema 4. Tomando los planos de dos en dos se obtienen las ecuaciones paramétricas de las rectas:

$r_1\equiv(x,y,z)=(3,0,0)+l(-1,1,0)$

$r_2\equiv(x,y,z)=(0,0,0)+l(0,1,0)$

$r_3 \equiv (x, y, z) = (0,0,0) + \lambda(1,0,0)$

Resolviendo los planos de tres en tres se obtienen los vértices del tetraedro:

$$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 \Rightarrow A(1,1,1)$$

$$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi 4 \Rightarrow B(0,3,0)$$

$$\pi_1 \cap \pi_3 \cap \pi_4 \Rightarrow C(3,0,0)$$

$$\pi_2 \cap \pi_3 \cap \pi_4 \Rightarrow D(0,0,0)$$

El área del triángulo de la base es $A = \frac{1}{2}\left|DB \times DC\right| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4{,}5\ u.a.$ y la altura será $d(A, \pi_4) = \frac{|1|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = 1u.l.$ Siendo observadores vemos que estos cálculos no son necesarios pues el triángulo de la base es rectángulo de catetos iguales a 3 y la altura es la tercera coordenada del punto A al estar la base del tetraedro en z=0.