Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones del ejercicio A	**Septiembre de 2000**

Problema 1. Resolviendo por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & l & l \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & l-3 & l-3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & l-5 & l-5 \end{pmatrix}.$$

Si $l=5$ el sistema es compatible e indeterminado: tres planos que pasan por una recta.

Si $l \neq 5$ el sistema es compatible y determinado: tres planos que se cortan en el punto (0,0,1).

Problema 2. Al ser una moneda simétrica se trata de una binomial $B\left(\frac{1}{2},5\right)$.

$p(x=0)=\binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$; $p(x=1)=\binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{5}{32}$ y finalmente:

$$p(x>1)=1-p(x\leq 1)=1-p(x=0)-p(x=1)=\frac{13}{16}.$$

Problema 3. Basta sustituir las coordenadas de los puntos en las rectas correspondientes y comprobar que se cumplen las ecuaciones.

La recta r pasa por A(0,0,0) y tiene de dirección u(1,1,1). A su vez la recta s pasa por B(0,5,0) y tiene de dirección v(1,0,0). Obtenemos el vector AB(0,5,0) y calculamos la distancia entre las rectas: $d=\frac{[u,v,AB]}{|u\times v|}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}=\frac{5}{\sqrt{2}}$.

El producto mixto da el volumen del paralelepípedo determinado por u,v y AB. El módulo del producto vectorial de uxv da el área de su base. Por tanto la altura será el cociente entre ambos.

Problema 4. El área del cuadrado será $\left(\frac{x}{4}\right)^2$ y el área del rectángulo será $\frac{y}{6}\cdot\frac{y}{3}$.

Como x+y = 100, el área total vendrá dada por: $A_T = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{1}{18}(100-x)^2$.

Derivando e igualando a cero: $A'_T = \frac{x}{2} - \frac{1}{9}(100-x) = 0$, $x = \frac{200}{11}$.

Si x=0, no hay cuadrado y el área total vale: $A_T \approx 555{,}5$.

Si x=100, no hay rectángulo y el área total vale: $A_T \approx 625$ (máximo).

Si $x = \frac{200}{11}$, entonces $y = \frac{900}{11}$ y el área total vale: 392,6 (mínimo).

Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones del ejercicio B	**Septiembre de 2000**

Problema 1. El plano que pasa por el punto A(0,0,0) viene determinado además por los vectores u(0,2,2) y v(2,0,2).

La ecuación implícita del plano será: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$, es decir x+y-z =0. La distancia del punto al plano es: $d(P,p) = \dfrac{|-7|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \dfrac{7}{\sqrt{3}}$

Problema 2. Resolviendo por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3+l \\ 1 & -3 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3+l \\ 0 & -4 & -1 & -5-l \\ 0 & 1 & 4 & 5+l \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3+l \\ 0 & 1 & 4 & 5+l \\ 0 & 4 & 1 & 5+l \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3+l \\ 0 & 1 & 4 & 5+l \\ 0 & 0 & -15 & -15-3l \end{pmatrix}$$

Por tanto, expresando la solución en función del parámetro: $\left(1+\dfrac{3l}{5}, 1+\dfrac{l}{5}, 1+\dfrac{l}{5}\right)$ indica que es un sistema compatible y determinado para cualquier valor del parámetro.

Resolviendo el sistema: $\begin{cases} x-3y=-2 \\ -x+3z=2 \end{cases}$, se obtiene la recta: $\left(x, \dfrac{2+x}{3}, \dfrac{2+x}{3}\right)$. Sus puntos tienen iguales las coordenadas "y" y "z", y lo mismo le ocurre a cualquier punto P solución del sistema anterior. En consecuencia todos los puntos solución del sistema pertenecen a esta recta.

Problema 3. Tipificando la normal N(1,70;0,1):

$$p(x > 1{,}72) = p(z \geq \frac{1{,}72-70}{0{,}1}) = p(z \geq 0{,}2) = 0{,}4207 .$$

Al seleccionar 4 personas con probabilidad 0,4207 se trata ahora de una binomial B(4;04207):

$$p(x=1) = \binom{4}{1} 0{,}4207^1 \cdot 05793^3 = 0{,}3271$$

$$p(x=0)=\binom{4}{0}0{,}4207^{0}\cdot 05793^{4}=0{,}1126$$

$$p(x\geq 2)=1-p(x<2)=1-p(x=0)-p(x=1)=1-01126-0{,}3271=0{,}5603$$

Problema 4. Para hallar el volumen de revolución despejamos: $y=3\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ y realizamos la integral: $V=2p\int_0^a 9\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=18p\left[x-\frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a=12pa$.

El volumen en función de "t" es $V=12p(5+3t)$ y al derivar $V'=36p=cte$. Esto indica que la figura se desplaza pero no por ello varía su volumen.